

**UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET**

Luka Vulanović

**PRIMJENA PCA ANALIZE I KOMPRESIVNOG
ODABIRANJA U OBRADI BIOMEDICINSKIH SLIKA**

-Master rad-

Podgorica, 2025. godine

PODACI I INFORMACIJE O STUDENTU

Ime i prezime: Luka Vulanović

Datum i mjesto rođenja: 21.08.2000. godine, Kotor, Crna Gora

Naziv završenog osnovnog studijskog programa i godina završetka studija: Elektronika, telekomunikacije i računari, 2022. godine

INFORMACIJE O MASTER RADU

Naziv master studija: Akademske master studije - Elektronika

Naslov rada: Primjena PCA analize i kompresivnog odabiranja u obradi biomedicinskih slika

Fakultet/Akademija na kojem je rad odbranjen: Elektrotehnički fakultet, Podgorica

UDK, OCJENA I ODBRANA MASTER RADA

Datum prijave master rada: 23.05.2024. godine

Datum sjednice Vijeća na kojoj je prihvaćena tema: 16.09.2024. godine.

Mentor: Doc. dr Anđela Draganić

Komisija za ocjenu/odbranu rada:

Prof. dr Žarko Zečević

Doc. dr Anđela Draganić

Doc. dr Miloš Brajović

Lektor:

Datum odbrane:

Datum promocije:

Izjava o autorstvu

Potpisani-a Luka Vulanović

Broj indeksa/upisa 1/22

Izjavljujem

da je master rad pod nazivom

"Primjena PCA analize i kompresivnog odabiranja u obradi biomedicinskih slika"

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predloženi master rad ni u cjelini ni u djelovima nije bio predložen za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja,
- da su rezultati korektno navedeni, i
- da nijesam povrijedio/la autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju trećim licima.

U Podgorici, 25.06.2025. godine

Potpis magistranda

Sažetak

Kompresivno odabiranje (Compressive Sensing – CS) je pristup koji nalazi sve veću primjenu u oblastima kao što su elektrotehnika, matematika, kompjuterske nauke. Naime, ovaj pristup omogućava uspješnu rekonstrukciju signala iz značajno manje prikupljenih odbiraka u poređenju sa tradicionalnim metodama akvizicije signala. Da bi se osigurala rekonstrukcija, potrebno je da signal zadovoljava uslov rijetkosti u nekom od transformacionih domena. Stoga će u ovom radu biti posvećena pažnja izboru adekvatnog domena rijetkosti i testiranju najpogodnijeg algoritma za rekonstrukciju iz grupe algoritama baziranih na konveksnoj optimizaciji kao i algoritama iz tzv. *greedy* grupe.

Kombinovanje kompresivnog odabiranja sa analizom glavnih komponenti (eng. *Principal Component Analysis* – PCA) može biti korisno, jer PCA smanjuje dimenzionalnost podataka identifikovanjem važnih komponenti koje čuvaju informacije o signalu. Na taj način omogućava lakšu i efikasniju analizu i interpretaciju podataka, kao i smanjenje računarskih zahtjeva za obradu signala (slike). Pažnja će biti posvećena primjeni PCA analize i CS-a u obradi medicinskih slika.

Prilikom medicinskog snimanja, slike mogu biti zašumljene ili lošeg kvaliteta usljed pokreta pacijenata koji mogu biti slučajni ili uzrokovani uznemirenošću pacijenta. Primjenom kompresivnog odabiranja i odgovarajućeg rekonstrukcionog algoritma, nastoji se dobijanje slika boljeg kvaliteta koje bi bile pogodne za dalju analizu. Analiza glavnih komponenti omogućava izdvajanje najznačajnijih komponenti slike, čime se u kombinaciji sa kompresivnim odabiranjem, dodatno smanjuju resursi potrebni za snimanje i kasniju analizu signala.

U radu će biti izvršena analiza i poređenje performansi više pristupa za rekonstrukciju oštećenih biomedicinskih slika (tj. slika sa nedostajućim pikselima). Analiziraće se koliki je dovoljan broj glavnih (eng. *principal*) komponenti kako bi rekonstruisana slika bila zadovoljavajućeg kvaliteta. Kao mjere kvaliteta rekonstrukcije koristiće se strukturni indeks sličnosti (eng. *Structural similarity index* - SSIM) i odnos signala i šuma (eng. *Peak signal-to-noise ratio* - PSNR).

Ključne riječi: analiza glavnih komponenti, kompresivno odabiranje, rekonstrukcioni algoritmi, biomedicinski signali, transformacioni domeni

Abstract

Compressive Sensing (CS) is an approach that finds applications in fields such as electrical engineering, mathematics, and computer science. This technique enables successful reconstruction from significantly fewer collected samples compared to traditional sampling methods. To ensure reconstruction, the signal must meet the sparsity condition in original or in some transform domain. Therefore, this paper will focus on choosing the appropriate sparsity domain among several observed domains and testing the most suitable reconstruction algorithm from the convex optimization group and the greedy group.

Combining compressive sensing with Principal Component Analysis (PCA) can be beneficial. Namely, PCA is used to reduce the dimensionality of data by identifying the most important components of a signal. This allows for easier and more efficient data analysis and interpretation, as well as reducing computational requirements for signal (image) processing.

During medical imaging, the images can be noisy or of poor quality due to patient anxiety or accidental movements. By using compressive sensing and an appropriate reconstruction algorithm, the goal is to reconstruct the image to improve its quality to be suitable for further analysis. Principal Component Analysis further allows for the extraction of the most significant components of the image, that in combination with the compressive sensing lowers the resources required for collecting samples and signal analysis.

The paper will analyze and compare the results of reconstructing several degraded biomedical images (images with missing pixels). The sufficient number of principal components will be determined to ensure the reconstructed image is of satisfactory quality. Measures of reconstruction quality will include the Structural Similarity Index (SSIM) and the Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR).

Keywords: principal component analysis, compressive sensing, reconstruction algorithms, biomedical signals, transform domains

Sadržaj

| | | |
|--------|---|----|
| 1. | Uvod..... | 9 |
| 2. | Analiza glavnih komponenti..... | 12 |
| 2.1 | Uvod u analizu glavnih komponenti | 12 |
| 2.2 | Metodi za računanje PCA | 17 |
| 2.2.1 | Metod kovarijanse..... | 17 |
| 2.2.2. | Metod zasnovan na dekompoziciji na singularne vrijednosti (Singular Value Decomposition)..... | 19 |
| 2.2.3. | Primjer PCA analize u Matlabu | 22 |
| 3. | Kompresivno odabiranje..... | 26 |
| 3.1 | Uvod u kompresivno odabiranje | 26 |
| 3.2 | Matematičke formulacije..... | 27 |
| 3.3 | Transformacioni domen | 29 |
| 3.3.1 | DCT transformacioni domen | 29 |
| 3.3.2 | DFT transformacioni domen..... | 30 |
| 3.4 | Algoritmi za rekonstrukciju | 31 |
| 3.4.1 | Gradijentni algoritam | 32 |
| 3.4.2 | Algoritmi zasnovani na pragovanju | 33 |
| 4. | Kompresivno odabiranje i PCA u analizi biomedicinskih slika | 35 |
| 4.1 | Primjena kompresivnog odabiranja..... | 35 |
| 4.2 | Primjena PCA..... | 36 |
| 4.3 | Kombinovanje PCA i CS | 37 |
| 5. | Eksperimentalni rezultati | 39 |
| 5.1 | PCA analiza na oštećenoj slici: | 40 |
| 5.2 | Primjena gradijentnog algoritma i PCA analize u rekonstrukciji i izdvajanju bitnih karakteristika iz biomedicinskih slika | 41 |
| 5.2.1 | DCT transformacioni domen kao domen rijetkosti | 41 |
| 5.2.2 | DFT transformacioni domen:..... | 52 |
| 5.3 | Primjena TwiST algoritma i PCA analize u rekonstrukciji i izdvajanju bitnih karakteristika iz biomedicinskih slika..... | 60 |
| 5.3.1 | DCT transformacioni domen: | 61 |
| 5.3.2 | DFT transformacioni domen..... | 68 |
| 6. | Zaključak..... | 77 |
| | Literatura..... | 78 |

Lista slika

| | |
|---|----|
| Slika 2.1: Proizvoljan set podataka u 2-d prostoru | 13 |
| Slika 2.2: Grafik od 50 mjerenja na dvijema varijablama x_1 i x_2 | 16 |
| Slika 2.3: Grafik od 50 mjerenja sa slike 2.2, transformisano u glavne komponente | 17 |
| Slika 2.4: Scree plot koji prikazuje udio varijanse u svakoj od 5 glavnih komponenti | 21 |
| Slika 2.5: Početni skup podataka | 22 |
| Slika 2.6: Novi skup podataka dobijen nakon množenja sa slučajnom matricom | 23 |
| Slika 2.7: Projektovane vrijednosti originalnih podataka | 25 |
| | |
| Slika 3.1: Gornja slika: signal u vremenskom domenu; donja slika: Furijeova transformacija signala | 31 |
| | |
| Slika 4.1: ECG signal i najbitniji djelovi signala..... | 36 |
| | |
| Slika 5.1: MRI koljena, glave i stopala..... | 40 |
| Slika 5.2: Prva vrsta - oštećene slike, druga vrsta - rezultati nakon PCA analize. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni..... | 40 |
| Slika 5.3: Primjeri oštećenih slika rezolucije 128×128. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni | 41 |
| Slika 5.4: Slike rezolucije 128×128 nakon rekonstrukcije primjenom gradijentnog algoritma. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni | 42 |
| Slika 5.5: Primjeri oštećenih slika rezolucija 256×256 (prva vrsta) i 512×512 (druga vrsta). Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni..... | 42 |
| Slika 5.6: Slike nakon rekonstrukcije primjenom gradijentnog algoritma: 256×256 (prva vrsta) i 512×512 (druga vrsta). Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni | 43 |
| Slika 5.7: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 70% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 44 |
| Slika 5.8: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 45 |
| Slika 5.9: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 30% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 46 |
| Slika 5.10: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slika stopala dimenzija 512×512, druga vrsta – slika glave dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 51 |
| Slika 5.11: Primjeri oštećenih slika rezolucije 128×128. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni | 52 |

| | |
|--|----|
| Slika 5.12: Slike rezolucije 128×128 nakon rekonstrukcije primjenom gradijentnog algoritma. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni | 52 |
| Slika 5.13: Primjeri oštećenih slika rezolucija 256×256 (prva vrsta) i 512×512 (druga vrsta). Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni..... | 53 |
| Slika 5.14: Slike nakon rekonstrukcije primjenom gradijentnog algoritma: 256×256 (prva vrsta) i 512×512 (druga vrsta). Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni | 53 |
| Slika 5.15: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 70% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta – slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 54 |
| Slika 5.16: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta – slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 55 |
| Slika 5.17: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 30% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta – slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 56 |
| Slika 5.18: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slika stopala dimenzija 512×512, druga vrsta – slika glave dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 60 |
| Slika 5.19: Slike nakon rekonstrukcije primjenom TwiST algoritma: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni | 61 |
| Slika 5.20: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 70% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta – slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 62 |
| Slika 5.21: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta – slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 63 |
| Slika 5.22: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 30% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta – slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 64 |
| Slika 5.23: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slika stopala dimenzija 512×512, druga vrsta – slika glave dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 68 |
| Slika 5.24: Slike nakon rekonstrukcije primjenom TwiST algoritma: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni | 69 |

| | |
|--|----|
| Slika 5.25: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 70% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 70 |
| Slika 5.26: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 71 |
| Slika 5.27: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 30% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 72 |
| Slika 5.28: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slika stopala dimenzija 512×512, druga vrsta – slika glave dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni | 76 |

Lista tabela

| | |
|---|----|
| Tabela 5.1: Rezultati PCA analize primijenjene na oštećenoj slici koljena rezolucije 512×512 | 41 |
| Tabela 5.2: Rezultati PCA analize primijenjene na slici koljena – gradijentni algoritam (DCT domen) | 47 |
| Tabela 5.3: Rezultati PCA analize primijenjene na slikama stopala i glave – gradijentni algoritam (DCT domen)..... | 50 |
| Tabela 5.4: Rezultati PCA analize primijenjene na slici koljena – gradijentni algoritam (DFT domen) | 57 |
| Tabela 5.5: Rezultati PCA analize primijenjene na slikama stopala i glave – gradijentni algoritam (DFT domen) | 59 |
| Tabela 5.6: Rezultati PCA analize primijenjene na slici koljena – TwIST algoritam (DCT domen) | 65 |
| Tabela 5.7: Rezultati PCA analize primijenjene na slikama stopala i glave – TwIST algoritam (DCT domen)..... | 67 |
| Tabela 5.8: Rezultati PCA analize primijenjene na slici koljena – TwIST algoritam (DFT domen) | 73 |
| Tabela 5.9: Rezultati PCA analize primijenjene na slikama stopala i glave – TwIST algoritam (DFT domen) | 75 |

1. Uvod

Napredovanje digitalnih tehnologija transformiše zdravstvenu industriju, donoseći brojne inovacije koje poboljšavaju kvalitet njege i efikasnost usluga. Elektronski zdravstveni kartoni omogućavaju praćenje istorije bolesti i poboljšavaju koordinaciju među zdravstvenim radnicima. Uvođenjem telemedicine i monitoring stanja pacijenta na daljinu u mnogim slučajevima smanjuje potrebu za dolaskom pacijenata u zdravstvene ustanove, što je posebno korisno u djelovima van grada i osobama sa ograničenom pokretljivošću. Vještačka inteligencija sve više koristi analizu medicinskih slika, dijagnostiku i predviđanje bolesti, čime se povećava preciznost i brzina donošenja odluka. Sve ove tehnologije zajedno unapređuju zdravstveni sistem, smanjuju troškove i povećavaju dostupnost usluga.

U kontekstu digitalizacije podataka u zdravstvenim sistemima, susrećemo se sa velikom količinom i kompleksnošću podataka. U takvom okruženju javljaju se potrebe za korišćenjem efikasnih metoda za redukciju dimenzionalnosti. Jedna od najpopularnijih i najvažnijih tehnika koja se koristi za ove svrhe jeste analiza glavnih komponenti (eng. *Principal Component Analysis - PCA*). Ova tehnika se počinje pominjati prvi put prije nekih stotinu godina, a danas predstavlja osnovni alat u više naučnih disciplina kao što su statistika, mašinsko učenje, obrada signala. Analiza glavnih komponenti predstavlja metod za transformaciju skupa eventualno korelisanih promjenjivih u skup linearno nekorelisanih promjenjivih poznatih kao glavne komponente. Prva glavna komponenta će sadržati najveći dio varijanse podataka, dok svaka sljedeća obuhvata što je moguće više preostale varijanse pod uslovom da je ortogonalna u odnosu na prethodne komponente. PCA omogućava redukciju dimenzionalnosti podataka, čime se smanjuje složenost analize i poboljšava interpretabilnost rezultata.

Povodom kontinualnog napretka metoda u analizi i obradi signala, količina i složenost prikupljenih informacija postaju sve veći izazov. Tradicionalne metode uzorkovanja i rekonstrukcije slike često zahtijevaju veliku količinu podataka što može biti skupo i neefikasno. U tom kontekstu kompresivno odabiranje (*Compressive Sensing - CS*)

donosi značajne inovacije. Metoda je razvijena početkom 21. vijeka i omogućava efikasno prikupljanje i rekonstrukciju signala (slike) koristeći mnogo manje uzoraka u odnosu na Šenon-Nikvistovu teoremu o odabiranju. Ključni radovi na ovu temu pripisuju se Emmanuel Candès-u, Terence Tao-u i David Donoho-u, koji su razvili teorijske osnove i pokazali kako je moguće rekonstruisati signal iz značajno manjeg broja uzoraka od onoga što nalaže tradicionalni, Šenon-Nikvistov pristup. Primjenjuje se u različitim aplikacijama pokazujući ogroman potencijal za unapređenje postojećih tehnologija i razvoj novih metoda obrade podataka.

U ovom radu istražiće se sinergijski efekat kombinovanja kompresivnog odabiranja i PCA analize za rekonstrukciju i obradu biomedicinskih slika. Prvi korak biće rekonstrukcija oštećenih slika primjenom kompresivnog odabiranja i odgovarajućeg rekonstrukcionog algoritma. U literaturi postoji veliki broj algoritama koji se koriste u svrhu rekonstrukcije rijetkih (eng. *spars*) signala, što je jedan od uslova za primjenu pristupa kompresivnog odabiranja. U radu ćemo analizirati gradijentni algoritam iz grupe konveksnih optimizacija, kao i TwIST algoritam koji pripada tzv. *greedy* grupi. Nakon uspješne rekonstrukcije slike, primijenit ćemo PCA analizu za izdvajanje značajnih komponenti i redukciju dimenzionalnosti.

Medicinska snimanja su nezamjenjiv alat u modernoj medicini, omogućavajući ljekarima da vizualizuju unutrašnje strukture tijela i uspostave tačne dijagnoze. Tehnike kao što su kompjuterska tomografija (CT), magnetna rezonansa (MRI), rendgensko snimanje i ultrazvuk su vrlo korišćene u medicinskoj praksi. Iako su ove tehnologije revolucionisale medicinsku dijagnostiku, postoji niz mana koje bi trebalo prevazići. Metode snimanja, poput MRI, mogu trajati jako dugo što može biti neprijatno za pacijente a dugotrajna snimanja povećavaju rizik od artefakata koji mogu nastati usljed pokreta pacijenta. Prilikom CT i rendgenskog snimanja pacijenti bivaju izloženi jonizujućem zračenju, što može imati negativan ishod po zdravlje pacijenta, naročito pri ponovljenim pregledima. Dalje, medicinske slike su uglavnom visoke rezolucije, što rezultira postojanjem velikih količina podataka koje je potrebno skladištiti i obrađivati. Ovo može biti izazovno za zdravstvene institucije sa ograničenim resursima. Kombinacija kompresivnog odabiranja i analize glavnih komponenti može u određenoj mjeri omogućiti prevazilaženje ovih problema medicinskog snimanja.

Rad je organizovan na sljedeći način. Prvo poglavlje je uvod u teme koje će biti razmatrane u ovom radu, kao i prikaz motivacije i ciljeva istraživanja. Drugo poglavlje opisuje teorijske osnove i koncepte PCA pristupa. Biće opisan matematički model kao i načini primjene ovog pristupa u analizi podataka. U trećem poglavlju će se govoriti o kompresivnom odabiranju kao i o algoritmima korišćenim za rekonstrukciju spars signala. Takođe će i ovdje biti opisan matematički model i princip korišćenja, kao i konkretna primjena u određenim aplikacijama. U četvrtom poglavlju ćemo povezati ova dva pristupa i objasniti mogućnost i efikasnost primjene njihovog kombinovanja u oblasti medicinske dijagnostike. U petom poglavlju će biti dati rezultati prethodno analiziranih biomedicinskih slika korišćenjem pomenutih metoda. Upoređivaćemo rezultate kvaliteta rekonstrukcije oštećenih slika primjenom algoritama iz različitih grupa, u kombinaciji sa PCA analizom u cilju smanjenja dimezionalnosti i izdvajanju bitnih karakteristika. Posmatraće se slike različitih rezolucija. U posljednjem šestom poglavlju je dat sumarni pregled i diskusija vezano za i praktičnost primjene predloženog pristupa.

2. Analiza glavnih komponenti

2.1 Uvod u analizu glavnih komponenti

PCA je metoda za smanjenje dimenzionalnosti i izdvajanje karakteristika signala. To je najčešće korišćen nesupervizovani algoritam u oblasti mašinskog učenja i vještačke inteligencije. Naziva se još i diskretna Karhunen-Loève transformacija - KLT ili Hotellingova transformacija [1]. Glavna ideja PCA je smanjenje dimenzionalnosti skupa podataka sastavljenog od velikog broja međusobno povezanih varijabli, dok se zadržava što više varijacija iz skupa podataka. To se postiže transformisanjem skupa korelisanih varijabli u manji broj nekorelisanih varijabli koje nazivamo glavnim komponentama. Glavne komponente su linearne kombinacije originalnih varijabli koje su nekorelisane, a svaka komponenta objašnjava određeni procenat ukupne varijanse u podacima. Ova metoda je naročito korisna kada se analiziraju podaci sa velikim brojem međusobno korelisanih varijabli.

Cilj PCA je smanjenje dimenzionalnosti skupa podataka, zadržavajući maksimalnu moguću količinu informacija (varijanse) iz originalnog skupa. Time se smanjuje šum i drugi neželjeni artefakti, dok se poboljšava efikasnost obrade podataka, smanjujući potrebu za memorijom i vremenom [2]. PCA omogućava bolje razumijevanje i vizualizaciju podataka transformisanjem iz n -dimenzionog prostora u prostor sa manjim brojem dimenzija, fokusirajući se na karakteristike koje najviše doprinose varijansi [1]. Prva glavna komponenta (PC1) objašnjava najveći dio varijanse, dok svaka naredna komponenta, ortogonalna prethodnima, objašnjava sve manje. Učitavanje označava doprinos svake originalne varijable glavnim komponentama, dok je skor vrijednost glavne komponente u određenom uzorku [3]. Često prilikom prikupljanja podataka snimamo više dimenzija nego što je potrebno za opisivanje skupa podataka, jer ne znamo koja mjerenja najbolje oslikavaju dinamiku sistema. Većina realnih mjerenja je podložna određenom šumu, pa PCA ima za cilj pronalaženje ortogonalne baze, dobijene kao linearna kombinacija originalnih promjenljivih, koja omogućava optimalno predstavljanje signala zahvaćenih šumom..

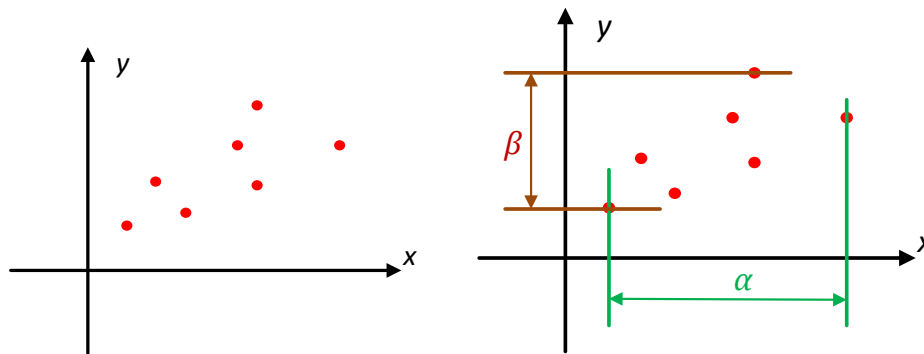
Važno je istaknuti da PCA ne smanjuje direktno broj dimenzija skupa podataka, već rotira ose prostora tako da se one postavljaju duž linija maksimalne varijanse. Prva osa, koja obuhvata najveću varijansu, naziva se prva glavna komponenta (PC1). Druga osa, ortogonalna na prvu i koja obuhvata sljedeću najveću varijansu, naziva se druga glavna komponenta (PC2). Smanjenje dimenzionalnosti postiže se izborom samo nekoliko prvih glavnih komponenti za definisanje novog prostora.

Za bolju ilustraciju, zamislimo vizualizaciju u 2D prostoru s podacima koji imaju dvije visoko korelisane varijable, x i y [4]. Kada primijenimo PCA, novi koordinatni sistem se definiše tako da:

Prva osa (PC1) leži duž pravca najveće varijabilnosti.

Druga osa (PC2) je ortogonalna na prvu i opisuje preostalu varijabilnost.

Ako je varijabilnost duž druge komponente zanemarljiva, možemo zanemariti PC2 i analizirati podatke samo na osnovu PC1, čime se značajno pojednostavljuje analiza. Na osnovu slike 2.1, može se primijetiti da varijansa varijable x (proporcionalna njenom opsegu, označenom kao α) nadmašuje varijansu varijable y (proporcionalnu β). Ova vizualizacija jasno pokazuje kako PCA efikasno kompresuje informacije, zadržavajući što više bitnih karakteristika podataka.



Slika 2.1: Proizvoljan set podataka u 2-d prostoru

U drugom slučaju možemo definsati novu varijablu z , koja predstavlja linearnu kombinaciju varijabli x i y :

$$z = a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \quad (2.1)$$

Možemo uzeti bilo koju vrijednost za a_1 i a_2 ali uz neka ograničenja u njihovim veličinama. Maksimizacija varijanse z u zavisnosti od a_1 i a_2 svodi se na optimizacioni problem, koji se rješava odgovarajućim tehnikama optimizacije. Uvođenjem dodatnih varijabli do dimenzije D originalnog skupa podataka, zamjenjujemo oznake x sa x_1 , y sa x_2 , i tako dalje do x_D , a_1 sa u_1 , a_2 sa u_2 :

$$z = u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 + \dots + u_D \cdot x_D \quad (2.2)$$

Definišimo \mathbf{x} i \mathbf{u} kao vektore:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_D \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Vektor \mathbf{z} sad možemo zapisati kao:

$$\mathbf{z} = \mathbf{u}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{u} \quad (2.4)$$

Da bi postignli maksimum varijanse od \mathbf{z} definišemo skup \mathbf{X} čiji je prvi uzorak vektor \mathbf{x}_1 , drugi uzorak vektor \mathbf{x}_2 , N -ti uzorak vektor \mathbf{x}_N :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N],$$

gdje je $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iD} \end{bmatrix}$ (2.5)

Srednju vrijednost skupa računamo kao:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i. \quad (2.6)$$

Kovarijansu skupa \mathbf{X} računamo na sljedeći način:

$$\mathbf{C}_{D \times D} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T, \quad (2.7)$$

gdje je $\mathbf{C}_{D \times D}$ matrica kovarijanse uzoraka i čije sopstvene vrijednosti moraju biti ≥ 0 .

Varijansa od \mathbf{z} je definisana kao:

$$\text{var}\{\mathbf{z}\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i \bar{z}_i)^2 . \quad (2.8)$$

Obzirom da je $z_i = \mathbf{u}^T x_i$, dalje srednju vrijednost vektora \mathbf{z} možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \\ \bar{\mathbf{z}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}^T x_i = \mathbf{u}^T \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)}_{\bar{\mathbf{x}}} \\ \bar{\mathbf{z}} &= \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pa je varijansa:

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}^T x_i - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{x}})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}^T x_i - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{x}})(x_i^T \mathbf{u} - \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{u}) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}^T (x_i - \bar{\mathbf{x}})(x_i^T - \bar{\mathbf{x}}^T) \mathbf{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}^T (x_i - \bar{\mathbf{x}})(x_i - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{u} \\ \text{var}(\mathbf{z}) &= \mathbf{u}^T \underbrace{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{\mathbf{x}})(x_i - \bar{\mathbf{x}})^T \right]}_{\text{cov}\{\mathbf{X}\}=\mathbf{C}} \mathbf{u} \\ \text{var}(\mathbf{z}) &= \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da bi maksimizovali varijansu moramo uvesti ograničenje:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= 1 \\ \text{ili} & \\ \mathbf{u}^T \mathbf{u} &= 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Optimizacioni problem sada možemo definisati na sljedeći način:

$$\max \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} \quad \text{pod uslovom} \quad \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1. \quad (2.12)$$

Formiramo pomoćnu funkciju:

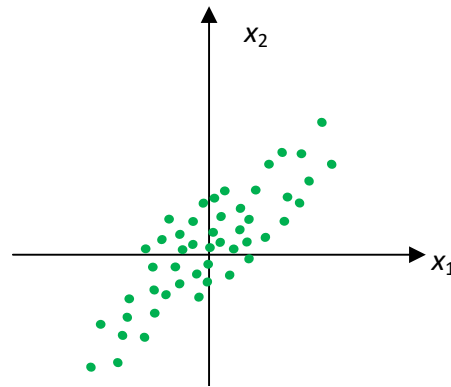
$$\begin{aligned} J &= \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} - \lambda (\mathbf{u}^T \mathbf{u} - 1) \\ &\quad \downarrow \\ &\text{Lagrange - ov množilac} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nastavljamo diferenciranjem funkcije J po \mathbf{u} i izjednačavamo sa nulom:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{u}} &= 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} &= 0 \quad , \\ \mathbf{C}\mathbf{u} &= \lambda\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdje je \mathbf{u} predstavlja sopstveni vector, a λ sopstvenu vrijednost. Korišćenjem izraza (2.14) pokazuje se da je varijansa jednaka sopstvenoj vrijednosti λ , što znači da ako želimo maksimalnu varijansu, moramo izabrati sopstveni vektor koji odgovara najvećoj sopstvenoj vrijednosti matrice kovarijanse. Ovaj pristup osigurava da prva glavna komponenta (PC1) maksimizira ukupnu varijabilnost skupa podataka, obuhvatajući što više informacija o originalnim varijablama.

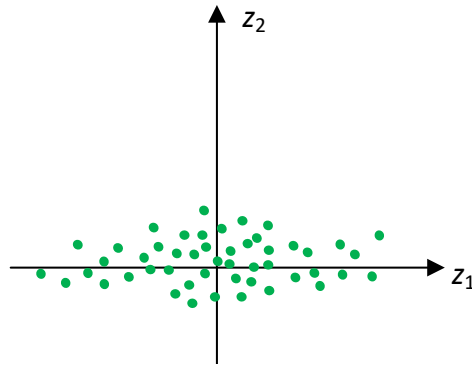
Sad možemo razmotriti primjer kada je $p = 2$, gdje je p broj glavnih komponenti. Sa ovakvim primjerom se inače u praksi nije moguće sresti, ali je ćemo koristiti ovaj pojednostavljeni primjer u cilju jednostavnijeg objašnjenja, jer se podaci mogu prikazati u dvije dimenzije [5]. Na slici 2.2 prikazana su 50 mjerenja dviju visoko korelisanih varijabli, označenih kao x_1 i x_2 .



Slika 2.2: Grafik od 50 mjerenja na dvijema varijablama x_1 i x_2

Vidimo da se se varijable značajno razlikuju, ali nešto više u pravcu x_2 ose u odnosu na x_1 . Kada primijenimo PCA na ovaj skup podataka i transformišemo ih u glavne komponente PC_1 i PC_2 , dobijamo grafički prikaz kao na slici 2.3. Sa slike 2.3, primjećujemo da je varijacija duž PC_1 (prve glavne komponente) veća nego varijacija u bilo kojoj od originalnih varijabli, dok je varijacija duž PC_2 (druge glavne komponente) prilično mala. Ovo ilustruje ključni koncept PCA: u slučaju skupa sa više od dvije ($p > 2$)

varijable koje su visoko korelisane, prvih nekoliko glavnih komponenti obično obuhvataju većinu ukupne varijacije podataka. Nasuprot tome, posljednje glavne komponente će biti orijentisane u pravcima gdje je varijacija minimalna, identifikujući gotovo konstantne linearne odnose među originalnim varijablama.



Slika 2.3: Grafik od 50 mjerenja sa slike 2.2, transformisano u glavne komponente

PCA se tradicionalno primjenjivala na linearne podatke, ali razvoj novih tehnologija omogućio je upotrebu i nelinearnih, kao i multilinearne metoda. Multilinearne metode proširuju koncept redukcije dimenzionalnosti na podatke koji su prirodno organizovani kao tenzori — višedimenzionalni nizovi. Ove metode su naročito korisne u oblastima poput kompjuterske vizije, obrade zvuka i govora, mašinskog učenja, prepoznavanja obrazaca i bioinformatike.

Danas, PCA i srodne tehnike igraju ključnu ulogu u raznim disciplinama kao što su energetika, ekologija, poljoprivreda, obrada slika i klimatske nauke. Ove metode ne samo da pojednostavljaju podatke, već omogućavaju i ekstrakciju značajnih karakteristika, što doprinosi naprednim analizama i boljem razumijevanju složenih sistema.

2.2 Metodi za računanje PCA

2.2.1 Metod kovarijanse

Označimo sa $\mathbf{X}_{M \times N}$ matricu čije kolone predstavljaju originalne setove podataka a sa $\mathbf{Y}_{M \times N}$ matricu koja je sa matricom \mathbf{X} vezana linearnom transformacijom i daje predstavu originalnog seta podataka [6]:

$$\mathbf{PX} = \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{PX} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x}_N] \equiv \mathbf{Y} \quad (2.15)$$

gdje je \mathbf{P} matrica koja transformiše \mathbf{X} u \mathbf{Y} , $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix}$ tj. set novih baznih vektora koji služe

za predstavljanje kolona matrice \mathbf{X} . Vektori vrsta matrice \mathbf{P} su glavne komponente (eng. *principal components*) matrice \mathbf{X} , odnosno, glavne komponente matrice \mathbf{X} su eigenvektori (sopstveni vektori) matrice \mathbf{XX}^T .

Neka je matrica kovarijanse:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N-1} \mathbf{YY}^T. \quad (2.16)$$

Matrica kovarijanse se može zapisati na sljedeći način [6]:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N-1} \mathbf{YY}^T = \frac{1}{N-1} (\mathbf{PX})(\mathbf{PX})^T,$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N-1} \mathbf{PXX}^T \mathbf{P}^T,$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N-1} \mathbf{PSP}^T, \quad (2.17)$$

gdje je $\mathbf{S} = \mathbf{XX}^T$ simetrična matrica, za koju važi:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T. \quad (2.18)$$

Matrica $\mathbf{\Sigma}$ je dijagonalna matrica a matrica \mathbf{U} je matrica sopstvenih vektora. Matrica \mathbf{P} se bira tako da je svaka vrsta \mathbf{p}_i sopstveni vektor (eigenvektor) od \mathbf{XX}^T , $\mathbf{P} = \mathbf{U}^T$, pa je [6]:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N-1} \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{P}^T = \frac{1}{N-1} \mathbf{P} (\mathbf{P}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{P}) \mathbf{P}^T = \frac{1}{N-1} (\mathbf{P} \mathbf{P}^T) \mathbf{\Sigma} (\mathbf{P} \mathbf{P}^T). \quad (2.19)$$

Ako je \mathbf{P} ortogonalna matrica, onda važi $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ pa je [6]:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N-1} (\mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{\Sigma} (\mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}) = \frac{1}{N-1} \mathbf{\Sigma}, \quad (2.20)$$

gdje i -ta dijagonalna vrijednost matrice \mathbf{C} predstavlja varijansu od \mathbf{X} duž \mathbf{p}_i

2.2.2. Metod zasnovan na dekompoziciji na singularne vrijednosti (Singular Value Decomposition)

Neka je $\mathbf{Z}_{N \times M}$ proizvoljna matrica i \mathbf{S} simetrična matrica sa rangom r . Definišimo set ortonormalnih sopstvenih vektora $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ sa odgovarajućim sopstvenim vrijednostima $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ simetrične matrice \mathbf{S} za koju važi [6]:

$$\mathbf{S} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad (2.21)$$

zatim:

$$\sigma_i \equiv \sqrt{\lambda_i}, \quad (2.22)$$

što predstavlja singularne vrijednosti, koje su pozitivni realni brojevi, kao i skup ortonormalnih vektora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ koji se definišu kao:

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{Z} \mathbf{u}_i. \quad (2.23)$$

Koristeći formule iznad možemo formirati dekompoziciju:

$$\mathbf{Z} \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i. \quad (2.24)$$

Iz jednakosti (2.24) vidimo da je matrica \mathbf{Z} pomnožena sopstvenom vrijednošću simetrične matrice jednaka skalaru pomnoženom sa drugim vektorom.

Ovo drugačije možemo zapisati kao:

$$\mathbf{ZV} = \mathbf{UD}, \quad (2.25)$$

gdje su \mathbf{V} i \mathbf{U} definisane kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_M], \\ \mathbf{U} &= [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_N], \end{aligned} \quad (2.26)$$

a matrica \mathbf{D} formirana na sljedeći način:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Pomnožimo jednakost (2.25) sa desne strane sa $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ kako bi dobili konačnu verziju dekompozicije:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{UDV}^T. \quad (2.28)$$

Vrat ćemo se na matricu originalnog seta podataka $\mathbf{X}_{M \times N}$ i definišimo novu matricu

$\mathbf{Y}_{N \times M}$:

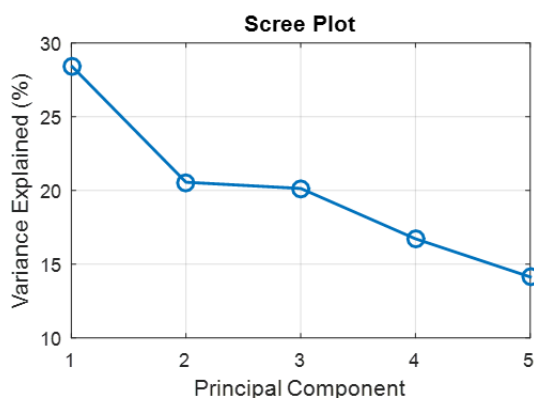
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \mathbf{X}^T. \quad (2.29)$$

Pokazuje se da je \mathbf{YY}^T jednako matrici kovarijanse:

$$\mathbf{YY}^T = \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}} \mathbf{X}^T \right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}} \mathbf{X}^T \right) = \frac{1}{N-1} \mathbf{XX}^T = \mathbf{C}_x. \quad (2.30)$$

Ako odradimo dekompoziciju na singularne vrijednosti matrice \mathbf{Y} , kolone matrice \mathbf{V} predstavljaće sopstvene vektore kovarijantne matrice \mathbf{C}_X , odnosno glavne komponente matrice \mathbf{X} .

Najčešće biramo broj glavnih komponenti potrebnih za vizuelizaciju podataka analizirajući *scree* dijagram (slika 2.4) [7]. Uzimamo najmanji broj glavnih komponenti preko kojih bismo objasnili značajan dio varijacije u podacima. Ovo radimo vizuelno, tako što tražimo tačku na *scree* dijagramu u kojoj procenat varijanse u svakoj narednoj glavnoj komponenti značajno opada. Često se ova prelomna tačka naziva „laktom” *scree* dijagrama. Gledajući sliku 2.4, možemo vidjeti da prva glavna komponenta obuhvata značajan dio varijanse, zatim druga i treća glavna komponenta obuhvataju oko 20% varijanse dok četvrta i peta komponenta obuhvataju manje od 20%. Primjećujemo da peta glavna komponenta obuhvata otprilike 15% varijanse u podacima.



Slika 2.4: Scree plot koji prikazuje udio varijanse u svakoj od 5 glavnih komponenti

Ovaj način određivanja glavnih komponenti je subjektivan. Ne postoji opšteprihvaćen način koji bi nam u svakoj situaciji pouzdano odredio dovoljan broj glavnih komponenti. U praksi se najčešće analizira prvih nekoliko glavnih komponenti kako bi se identifikovale potencijalno značajne informacije u podacima. Ako u prvim komponentama ne pronademo značajne informacije, vrlo je vjerovatno da nam i sljedeće neće biti od interesa. Međutim, ako prvih par glavnih komponenti otkrivaju relevantne karakteristike podataka, analiza se može proširiti i na dodatne komponente sve dok dobijamo informacije od interesa. Ovaj subjektivan pristup je široko korišćen i oslikava činjenicu da se PCA koristi kao alat u istraživačkoj analizi podataka.

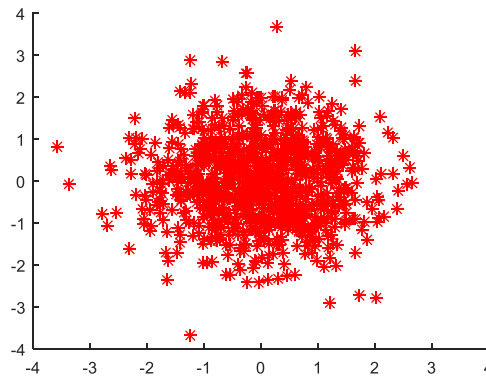
2.2.3. Primjer PCA analize u Matlabu

U nastavku je dat primjer računanja PCA u programskom paketu MATLAB [4]. Na početku ćemo generisati slučajne podatke, a zatim ćemo pronaći glavne komponente tih podataka. Neka je data matrica \mathbf{S} koja sadrži slučajne brojeve sa normalnom raspodjelom. Pretpostavimo da imamo, na primer, hiljadu uzoraka, svaki sa dva elementa:

```
S=randn(1000,2);
```

Ako bismo nacrtali (korišćenjem *scatter* naredbe) prvi i drugu kolonu matrice \mathbf{S} , dobili bismo sljedeći grafik, cirkularnog oblika:

```
scatter(S(:,1), S(:,2), 'r*')
```



Slika 2.5: Početni skup podataka

Varijansa kolona matrice \mathbf{S} je približno jednaka 1 – teorijski bi bila jednaka jedinici ali imajući u vidu da imamo ograničen broj od 1000 uzoraka, moguća su odstupanja. U ovom slučaju, vrijednosti varijanse su:

```
var(S(:,1)) = 0.9556;
```

```
var(S(:,2)) = 0.9493;
```

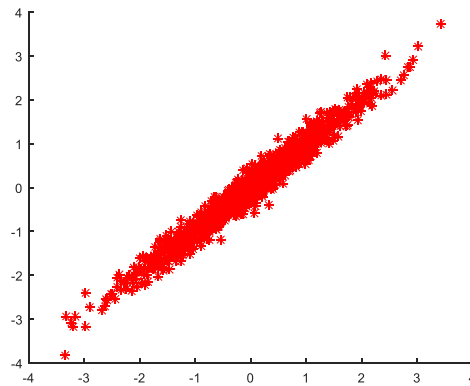
Posmatranje podataka iz različitih pravaca neće značajno promijeniti rezultate, naročito kada su podaci simetrični i ujednačeni kao u našem slučaju (slika 2.5). Međutim, u stvarnim aplikacijama često se suočavamo sa podacima koji imaju različite karakteristike i varijacije. Da bismo simulirali takve uslove i učinili naše podatke sličnijim onima koji se

nalaze u praktičnim problemima, potrebno je da prilagodimo originalne podatke. Da bismo to postigli, korist ćemo sledeći postupak: prvo ćemo kreirati slučajnu matricu \mathbf{A} . Ova matrica će imati slučajne vrijednosti koje su raspoređene na način koji odražava prirodnu varijaciju i kompleksnost podataka koje možemo očekivati u realnim scenarijima. Zatim ćemo ovu matricu \mathbf{A} pomnožiti sa matricom \mathbf{S} , koja sadrži naš originalni skup podataka sa normalnom raspodjelom. Množenje matrica \mathbf{A} i \mathbf{S} rezultuje novim skupom podataka koji odražava složenije obrasce i varijacije koje su karakteristične za stvarne aplikacije. Ovaj proces omogućava bolje razumijevanje i primjenu metoda kao što je PCA u kontekstu realnih problema.

```
A=rand(2,2);  
X=S*A;
```

Ako bismo nacrtali prvu i drugu kolonu matrice \mathbf{X} , dobili bismo sljedeći grafik:

```
scatter(X(:,1), X(:,2))
```



Slika 2.6: Novi skup podataka dobijen nakon množenja sa slučajnom matricom

Na ovom novom skupu podataka primjenjuje se PCA analiza. Prvo se računa matrica kovarijanse od \mathbf{X} . Da bismo pronašli glavne komponente, potrebno je da izračunamo sopstvene vrijednosti (*eigenvalues*) i sopstvene vektore (*eigenvectors*) ove matrice.

```
C=cov(X);  
[V,B]=eig(C);
```

Tražimo sopstveni vektor kome odgovara najveća sopstvena vrijednost. Dijagonalizujemo matricu sopstvenih vrijednosti \mathbf{B} i u našem slučaju, dobijamo da je najveća sopstvena vrijednost druga sopstvena vrijednost:

```
b=diag(B);  
[max_vr, max_index]=max(b);  
u=V(:,max_index);
```

Vektor \mathbf{u} je sopstveni vektor koji odgovara maksimalnoj sopstvenoj vrijednosti.

Vrijednost prve glavne komponente z se dobija na sljedeći način:

```
z=X*u;
```

Ako bismo izračunali varijansu za novi pravac z , dobijemo veću vrijednost varijanse nego što smo dobili za varijanse za prve dvije varijable \mathbf{X} u prvoj i drugoj koloni. Na ovaj način smo pronašli novi pravac, novu varijablu, koja je linearna kombinacija obje \mathbf{X} varijable i koja ima najveću moguću varijansu. Naime, u PCA, cilj je da pronađemo nove pravce (ili komponente) koji obuhvataju što veću količinu varijanse u skupu podataka, tako što se traže pravci duž kojih su podaci najviše raspršeni. Ovaj postupak omogućava nam da smanjimo dimenzionalnost podataka, tako što pronalazimo nekoliko ključnih pravaca koji obuhvataju većinu varijacije, umjesto da se bavimo velikim brojem originalnih varijabli.

U ovom kontekstu:

Varijansa prve dvije varijable skupa \mathbf{X} : Kada mjerimo varijansu svake od originalnih varijabli, dobijamo informacije o tome koliko su te varijable raspršene. Mjerenje varijanse \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 varijabli pojedinačno pruža uvid u raspršenost svake varijable, ali ne nužno na način na koji su te varijable međusobno raspoređene.

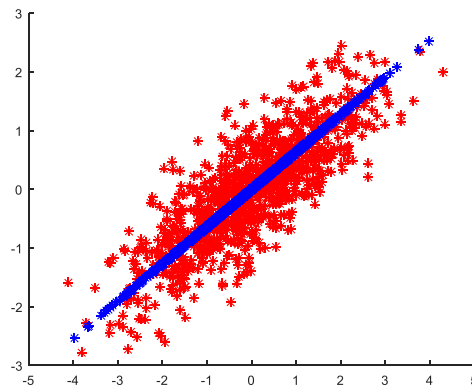
Novi pravac z : Da bismo pronašli pravac koji obuhvata najveću varijansu, kreirali smo novi pravac z koji je linearna kombinacija originalnih varijabli \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 . Na primjer,

možemo izraziti z kao $z=a\cdot\mathbf{X}_1+b\cdot\mathbf{X}_2$, gdje a i b predstavljaju koeficijente koje biramo kako bismo maksimizovali varijansu duž z .

Najveća varijansa: Kada pronađemo pravi pravac z , njegova varijansa će biti veća od varijansi koje smo mjerili za \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 pojedinačno. To znači da je pravac z bolji u obuhvatanju varijacije u podacima nego što su to bili originalni pravci \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 .

Nakon što smo pronašli glavne komponente, možemo projekciju z (koja je nova varijabla u tom prostoru) dekodirati da bismo dobili vrijednosti u originalnom prostoru podataka. Rezultat će biti varijable koje su slične originalnim varijablama, ali koje su transformisane prema glavnim komponentama (slika 2.7).

```
Y=z*u';
figure,
scatter(X(:,1), X(:,2), 'r*');
hold on
scatter(Y(:,1), Y(:,2), 'b*');
```



Slika 2.7: Projektovane vrijednosti originalnih podataka

Crvena linija sa slike 2.7 predstavlja \mathbf{X} - pravac duž kojeg su originalni podaci najviše raspršeni u okviru prve glavne komponente, a plava linija predstavlja \mathbf{Y} - pravac duž kojeg su originalni podaci najviše raspršeni u okviru druge glavne komponente i to su projektovane vrijednosti naših originalnih podataka. Ako posmatramo u pravcu koji je normalan na ove linije, dobićemo najveću moguću varijansu iz podataka.

3. Kompresivno odabiranje

3.1 Uvod u kompresivno odabiranje

Rekonstrukcija signala u tradicionalnim metodama zasniva se na Šenon-Nikvistovoj teoremi o odabiranju, koja nalaže da frekvencija odabiranja mora biti najmanje dvostruko veća od najveće frekvencije signala [8],[9]. Kada su u pitanju diskretni signali, tačna rekonstrukcija zahtijeva signal bude odabran frekvencijom koja je najmanje dva puta veća od maksimalne frekvencije signala. Ovakav pristup suočava se s brojnim izazovima, uključujući produženo trajanje odabiranja, povećanu potrošnju energije, zahtjev za velikim memorijskim kapacitetom i druge tehničke prepreke.

Kompresivno odabiranje (CS) [8]-[32] predstavlja savremeni i inovativni pristup koji prevazilazi ograničenja klasičnih metoda. Ovaj pristup omogućava rekonstrukciju rijetkih (eng. *sparse*) signala koristeći značajno manji broj mjerenja koja nisu međusobno korelisana. Osnovna pretpostavka ove metode je da se signalu odgovarajućem transformacionom domenu može predstaviti malim brojem nenultih koeficijenata u poređenju sa njegovom dužinom. Drugim riječima, u tom transformacionom domenu, samo mali broj odbiraka ima značajne vrijednosti, dok su ostali zanemarljivi ili jednaki nuli, što definiše pojam rijetkosti signala.

Pored rijetkosti, ključni zahtjev kompresivnog odabiranja je da mjerenja budu nekorelisana u domenu u kojem se vrši akvizicija signala. Na taj način, glavni cilj ovog pristupa je omogućiti preciznu procjenu originalnog signala uz korišćenje minimalnog broja linearnih i nekorelisanih mjerenja [11]. Rekonstrukcija rijetkih signala je ključna za rekonstrukciju signala koji su odabrani u skladu sa principima kompresivnog odabiranja. U posljednjoj deceniji postignut je značajan napredak u ovom području, razvijanjem brojnih algoritama za rekonstrukciju, dok i dalje predstavlja izazov odabir odgovarajućeg algoritma za specifične primjene [13].

Signal se smatra rijetkim u određenom domenu ako se može predstaviti malim brojem nenultih vrijednosti u tom domenu [16]. Za mnoge realne i sintetičke signale moguće je odrediti odgovarajući transformacioni domen u kojem signal pokazuje osobinu

rijetkosti. Zbog toga kompresivno odabiranje nalazi široku primjenu u različitim područjima. Već odavno, svojstvo rijetkosti signala koristilo se u algoritmima za kompresiju i kodiranje s ciljem eliminisanja redundantnosti u signalima.

Smanjeni skup mjerenja može nastati kao rezultat potrebe da se prikupi minimalan broj odbiraka, uz očuvanje mogućnosti za zadovoljavajuću rekonstrukciju signala. Drugi slučaj u kojem dolazi do smanjenja skupa mjerenja javlja se kada je u signal prisutan šum. U takvim situacijama, odbirci zahvaćeni šumom, ukoliko se uspješno detektuju, mogu se smatrati nedostajućim te se stoga odbacuju. Ovaj slučaj predstavlja nenamjerni način generisanja smanjenog skupa mjerenja.

3.2 Matematičke formulacije

Neka je $x(n)$ signal dužine N i koeficijenti njegove transformacije $X(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Signal i njegova transformacija se mogu opisati na sljedeći način [16]-[19]:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) B_k(n), \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) B_k^{-1}(n), \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdje su \mathbf{B} i \mathbf{B}^{-1} matrice direktne i inverzne transformacije. Ako se uzima samo M od ukupno N odbiraka, tada se vektor prikupljenih odbiraka naziva vektor mjerenja i može se zapisati kao:

$$\mathbf{u}_{M \times 1} = \mathbf{C}_{M \times N} \mathbf{x}_{N \times 1}, \quad (3.2)$$

gdje je \mathbf{C} matrica kompresivnog odabiranja, $\mathbf{C} = \mathbf{\Phi} \mathbf{B}$, pri čemu $\mathbf{\Phi}$ predstavlja matricu nasumično izabranih odbiraka, dok je $\mathbf{x}_{N \times 1} = \mathbf{B}^{-1}_{N \times N} \mathbf{X}_{N \times 1}$.

Sistem jednačina (3.2) je nedovoljno određen jer je broj dostupnih odbiraka M manji od dužine signala N . U većini slučajeva važi da je $M \ll N$. U cilju traženja optimalnog rješenja ovog sistema, koriste se optimizacione tehnike. Uglavnom, to optimalno rješenje je najrjeđe rješenje sistema, koje je u većini slučajeva jedinstveno.

Kao što je već rečeno, prvi preduslov koji treba da je ispunjen da bi rekonstrukcija iz manjeg skupa odbiraka bila uspješna jeste rijetkost signala u odgovarajućem domenu [20], [21]. Signal može biti rijetak u svom originalnom domenu, ali i u određenim transformacionim domenima. Domeni u kojima je signal najčešće rijedak su: domen diskretne kosinusne transformacije (DCT), domen diskretne Furijeove transformacije (DFT), talasni domen (*wavelet*), Hermitski domen [11], [23], [24], [29]. Ako rijetkost signala označimo sa R , to znači da je samo R od ukupno N koeficijenata iz transformacionog domena različito od nule. Rijetkost kod signala koji se javljaju u realnim aplikacijama većinski nije poznata unaprijed, pa se zbog toga broj mjerenja M potrebnih za uspješnu rekonstrukciju određuje empirijski. Postoje i signali koji nijesu potpuno rijetki u odgovarajućem transformacionom domenu. Međutim, većinski njihovi koeficijenti su približni nuli i mogu se zanemariti. Takvi signali se nazivaju kompresibilnim signalima [33].

Koherentnost predstavlja najveću korelaciju između bilo koja dva vektora kolona/vrsta matrica. Njena vrijednost, odnosno mjera korelacije je veća kada su dvije matrice više međusobno korelisane. U scenariju kompresivnog odabiranja, mjera korelacije između matrica Φ i \mathbf{B} treba da bude što manja da bi rekonstrukcija signala bila uspješnija. Definisana je sljedećom formulom [16]:

$$\mu(\Phi, \mathbf{B}) = \sqrt{N} \max_{k \geq 1, j \leq N} \left| \langle \Phi_k, \mathbf{B}_j \rangle \right|, \quad (3.3)$$

gdje su Φ_k vektori vrsta, a \mathbf{B}_j vektori kolona. Koherentnost može imati vrijednosti:

$$\mu \in [1, \sqrt{N}]. \quad (3.4)$$

Takođe, koherentnost se može izraziti i preko matrice kompresivnog odabiranja, kao maksimalna apsolutna vrijednost normiranog unutrašnjeg proizvoda između svih kolona matrice \mathbf{C} :

$$\mu(\mathbf{C}) = \max_{k \neq l, k \geq 1, l \leq C} \left| \frac{\langle \mathbf{C}_k, \mathbf{C}_l \rangle}{\|\mathbf{C}_k\| \|\mathbf{C}_l\|} \right|. \quad (3.5)$$

Broj nenulih vrijednosti u vektoru, može se odrediti minimizacijom ℓ_0 – norme. Norma je definisana relacijom:

$$\min \|\mathbf{x}\|_{\ell_0} \text{ pod uslovom } \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (3.6)$$

Minimizacija ℓ_0 – norme zahtijeva ispitivanje $\binom{N}{R}$ kombinacija, što predstavlja problem iz klase NP-teških problema [8]. Takođe, mala količina šuma u signalu može biti interpretirana kao nenulti uzorak, pa zbog toga ℓ_0 – norma nije pogodna za praktičnu primjenu. Zbog toga, uvodi se ℓ_1 – norma, koja se najčešće koristi za pronalaženje najrjeđeg rješenja sistema:

$$\min \|\mathbf{x}\|_{\ell_1} \text{ pod uslovom } \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (3.7)$$

gdje je $\|\mathbf{x}\|_{\ell_1} = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|$. Poželjno je da broj jednačina bude što manji, jer manji broj jednačina zahtijeva manje odbiraka, i samim tim se radi na uštedi energije i vremenu akvizicije. Traženje rješenja sistema koristeći ℓ_0 – normu može potrajati i zahtijeva $M \geq 2R$ jednačina. Lakša za rješavanje je ℓ_1 – norma ali zahtijeva veći broj jednačina i to $M \geq KR \log(N)$, gdje K predstavlja konstantu.

3.3 Transformacioni domen

Transformacioni domen imaju ključnu ulogu u analizi, obradi i rekonstrukciji signala. Pravilno odabran transformacioni domen posebno je važan za osiguranje rijetkosti signala, što je osnovni zahtjev u tehnikama poput kompresivnog odabiranja. Najčešće korišćeni transformacioni domen u digitalnoj obradi signala su diskretna kosinusna transformacija (DCT) i diskretna Furijeova transformacija (DFT) [11], [19], [20].

3.3.1 DCT transformacioni domen

DCT transformacija je vrlo korišćena u radu sa realnim signalima. Ona ga transformiše u frekvencijski domen i definiše se kao [29]:

$$DCT(k) = p(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8)$$

dok je inverzna transformacija:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} p(k) DCT(k) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.9)$$

U jednakostima (3.8) i (3.9) $x(n)$ je signal dužine N , a $p(k)$ je koeficijent normalizacije:

$$p(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} . \quad (3.10)$$

DCT se najviše koristi u kompresiji slika i video zapisa, jer omogućava efikasnu redukciju podataka uz očuvanje kvaliteta signala. Takođe, DCT je jako popularna u digitalnoj obradi zvuka, kao i u različitim aplikacijama u oblasti analize signala, gdje je važno eliminisati redundantnost podataka.

3.3.2 DFT transformacioni domen

Furijeova transformacija je jedna od osnovnih matematičkih transformacija koja se koristi u obradi multimedijalnih signala. Ona, kao i DCT transformiše signal iz vremenskog u frekvencijski domen, i na taj način omogućava razlikovanje komponenti signala od šuma, ukoliko je signal zahvaćen šumom.

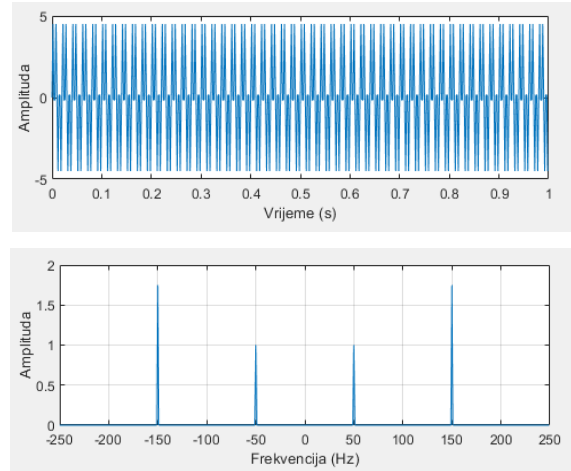
Ako imamo sinusoidalni signal $x(t)$, njegova Furijeova transformacija je [29]:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.11)$$

dok je njegova inverzna transformacija:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.12)$$

U frekvencijskom domenu, signal se predstavlja pikovima određene amplitude. Ako je signal realan, spektralni prikaz je simetričan ko nulte frekvencije, tj. dobijamo identične komponente na negativnim frekvencijama. Na slici ispod je dat primjer Furijeove transformacije u MATLAB-u. Korišćen je signal koji se sastoji od sume dvije sinusoide.



Slika 3.1: Gornja slika: signal u vremenskom domenu; donja slika: Furijeova transformacija signala

Pošto se u praksi uglavnom radi sa diskretnim signalima, potrebno je definisati Furijeovu transformaciju u diskretnom obliku. Za signal dužine N , Furijeova transformacija je definisana kao:

$$DFT(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} . \quad (3.13)$$

Inverzna Furijeova transformacija se definiše slično:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} DFT(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} . \quad (3.14)$$

Da bi se ubrzao proces računanja Furijeove transformacije kod kompleksnijih signala, razvijeni su specijalni algoritmi koji se nazivaju brza Furijeova transformacija (FFT).

3.4 Algoritmi za rekonstrukciju

Sistem jednačina (3.7) se može riješiti pomoću algoritama za rekonstrukciju rijetkih signala. Postoje algoritmi koji se baziraju na konveksnoj optimizaciji i *greedy* algoritmi među kojima se nalaze i oni koji su zasnovani na pragovanju [22]-[38]. Algoritmi bazirani na konveksnoj optimizaciji su računarski zahtjevniji i pružaju veću tačnost rekonstrukcije. Neki od njih su algoritmi poput Basic Pursuit-a i onih koji su zasnovani na gradijentu. *Greedy* algoritmi se danas više koriste i manje su zahtjevni, dok pružaju takođe visok

kvalitet rekonstrukcije. Matching Pursuit, Orthogonal Matching Pursuit [29], [33], [40], Iterative Hard Thresholding (IHT), Iterative Soft Thresholding (IST) [11], [38] - [40] su samo neki od algoritama iz *greedy* grupe koji danas pronalaze praktičnu primjenu.

3.4.1 Gradijentni algoritam

Gradijentni algoritam može biti prilagođen radu sa jednodimenzionalnim i dvodimenzionalnim signalima [19], [24],[23], [29], [41]-[44]. Imajući u vidu da su fokus ovog rada biomedicinske slike, ovdje će biti opisan dvodimenzioni pristup.

Pretpostavimo da imamo sliku dimenzija $N \times M$ sa određenim brojem nedostajućih piksela. Vrijednosti nedostajućih piksela mogu biti postavljene na nulu ili neku drugu vrijednost koju definiše korisnik. Stvarne vrijednosti mogu se pronaći iterativnim putem u domenu rijetkosti koristeći gradijentni pristup. U svakoj iteraciji, vrijednosti dostupnih piksela se mijenjaju se za unaprijed definisan korak λ , tj. $+\lambda$ i $-\lambda$ što dovodi do stalnog poboljšanja koncentracije signala u domenu u kom je signal rijedak. To omogućava određivanje gradijentnog vektora koji se dalje koristi za pronalazak stvarnih vrijednosti nedostajućih piksela [41], [43], [44]. Neka je \mathbf{x} dvodimenzioni signal, pri čemu je Q_1 skup pozicija dostupnih, a Q_2 nedostajućih piksela [41] - [44]:

$$x^{(0)}(a,b) = \begin{cases} x(a,b), & \text{za } (a,b) \in Q_1 \\ 0, & \text{za } (a,b) \in Q_2 \end{cases}, \quad (3.15)$$

a početna vrijednost koraka λ :

$$\lambda = \max_{a,b} |x^{(0)}(a,b)| \quad (3.16)$$

Gradijentni vektor računamo kao razliku između ℓ_1 -normi vektora \mathbf{X}^+ i \mathbf{X}^- :

$$\mathbf{G}^{(l)}(a,b) \leftarrow \frac{1}{NM} (\|\mathbf{X}^+\|_{\ell_1} - \|\mathbf{X}^-\|_{\ell_1}), \quad (3.17)$$

pri čemu su \mathbf{X}^+ i \mathbf{X}^- transformacioni vektori:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^+(a,b) &= \mathbb{T} [x^{(l)}(a,b) + \lambda] \\ \mathbf{X}^-(a,b) &= \mathbb{T} [x^{(l)}(a,b) - \lambda] \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdje \mathbb{T} predstavlja transformacioni operator. Na kraju, vrijednosti nedostajućih piksela korigujemo na sljedeći način:

$$x^{(l+1)}(a,b) = x^{(l)}(a,b) - G(a,b). \quad (3.19)$$

Vrijednosti se adaptiraju sve dok se ne dostigne kriterijum zaustavljanja [17], [18], [45]. Kada je kriterijum zaustavljanja dostignut, dalje poboljšanje koncentracije nije moguće, pa se vrijednost λ mora umanjiti na $\frac{\lambda}{3}$ prethodne vrijednosti. Proces traje sve dok preciznost P ne dostigne maksimalu vrijednost ($P_{max} \approx 100$ dB):

$$P = 10 \log_{10} \frac{\sum \sum_{(a,b) \in \mathbb{Q}_2} |x_s(a,b) - x^{(l)}(a,b)|^2}{\sum \sum_{(a,b) \in \mathbb{Q}_2} |x^{(l)}(a,b)|^2}, \quad (3.20)$$

pri čemu je $x_s(a,b) = x^{(0)}(a,b)$ za svaku novu vrijednost λ .

3.4.2 Algoritmi zasnovani na pragovanju

Algoritmi zasnovani na pragovanju (*Thresholding algorithms*) rade na principu adaptivnog praga kroz nekoliko iteracija. Mnogo su brži u odnosu na one algoritme bazirane na konveksnoj optimizaciji ali su manje precizni. Iteracija se može zapisati preko funkcije praga [11], [39], [40], [46], [47]:

$$x_i = P_v(f(\mathbf{X}_{i-1})), \quad (3.21)$$

gdje je \mathbf{X} rijetki vektor, f funkcija koja modifikuje izlaz prethodne iteracije i P_v funkcija praga.

Signal se može rekonstruisati pomoću mekog (*soft*) i tvrdog (*hard*) pragovanja pa zbog toga razlikujemo dva tipa algoritama: tzv. meko pragovanje ili *iterative soft thresholding* (IST) i tvrdo pragovanje ili *iterative hard thresholding* (IHT).

Funkcija mekog praga se primjenjuje na svaki element vektora \mathbf{X} i definisana je kao [11]:

$$M_\delta(X_i) = \begin{cases} X_i - \delta, & \mathbf{X} > \delta \\ 0, & |X_i| < \delta, \\ X_i + \delta, & \mathbf{X} < -\delta \end{cases} \quad (3.22)$$

dok funkcija tvrdog praga izgleda ovako [16], [48]:

$$P_R(\mathbf{X}) = \begin{cases} X_i, & |X_i| > \nu \\ 0, & |X_i| \leq \nu \end{cases}, \quad (3.23)$$

gdje ν predstavlja R -tu najveću komponentu od \mathbf{X} .

Algoritam iz grupe algoritama zasnovanih na pragovanju koji je korišćen u ovom radu jeste TwiST (*Two-Step Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithms for Image Restoration*) algoritam koji predstavlja unaprijeđenu verziju IST algoritma [47]. Nastao je iz potrebe da se prebrodi problem spore konvergencije u slučajevima kada je matrica kompresivnog odabiranja \mathbf{C} loše postavljena (eng. *ill-posed*) li loše uslovljena (eng. *ill-conditioned*). Matrica je dobro postavljena onda kada postoji rješenje sistema, jedinstveno je i ako se rješenje mijenja kontinuirano sa podacima. Loše uslovljena matrica znači da mala promjena u vektoru \mathbf{u} , u problemu $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ znači veliku promjenu u rješenju. Algoritam se pokazao kao vrlo dobar alat za rekonstrukciju slika sa nedostajućim pikselima [48].

l -ta iteracija algoritma se može definisati kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{l+1} &= (1 - \varepsilon)\mathbf{x}_{l-1} + (\varepsilon - \lambda)\mathbf{x}_l + \lambda W(\mathbf{x}_l) \\ \mathbf{x}_1 &= W(\mathbf{x}_0) \end{aligned}, \quad (3.24)$$

pri čemu početna vrijednost \mathbf{x}_0 može biti zadata od strane korisnika ili $\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}$. Parametri ε i λ su različiti od nule. Da bi definisali funkciju W , potrebno je da definišemo operator za smanjenje šuma:

$$\zeta(\nu) = \arg \min \tau^{-1} \rho(x) + \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{C}\mathbf{x}\|^2}{2}, \quad (3.25)$$

gdje $\rho(x)$ predstavlja regularizacionu funkciju. Dalje je:

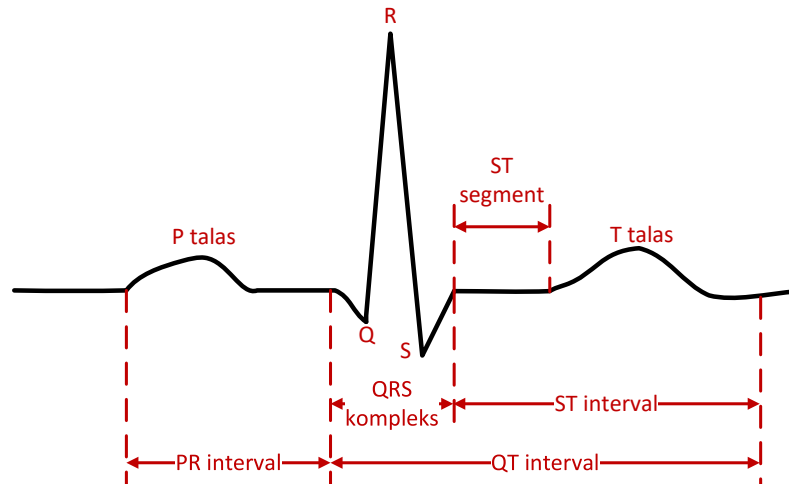
$$W(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x} + \mathbf{C}^T(\mathbf{u} - \mathbf{C}\mathbf{x})). \quad (3.26)$$

4. Kompresivno odabiranje i PCA u analizi biomedicinskih slika

4.1 Primjena kompresivnog odabiranja

Korišćenjem kompresivnog odabiranja moguće je rekonstruisati medicinsku sliku iz značajno manjeg broja odbiraka nego što to zahtijeva Šenon-Nikvistova teorema o odabiranju, što donosi brojne kliničke i tehničke prednosti. Smanjenje broja odbiraka skraćuje vrijeme potrebno za proces odabiranja, što u praktičnoj primjeni rezultira kraćim trajanjem snimanja, posebno u slučajevima gdje je pacijent izložen zračenju tokom MRI i CT snimanja. Time se postiže značajno ubrzanje postupka, uz dodatne ekonomske benefite i smanjenje potrošnje energije. Pored toga, smanjenje broja odbiraka omogućava optimizaciju prenosa i skladištenja medicinskih podataka, čime se poboljšava efikasnost digitalnih sistema u medicinskoj dijagnostici. Ovi faktori zajedno doprinose bržem i preciznijem dijagnostičkom procesu, uz istovremeno povećanje komfora pacijenata i smanjenje rizika povezanih sa dugotrajnom izloženošću medicinskim pretragama [50], [51].

Pored primjene u obradi biomedicinskih slika, kompresivno odabiranje se često koristi i za analizu biomedicinskih jednodimenzionih signala, kao što je npr. elektrokardiogram (ECG). ECG signal ilustruje električnu aktivnost srca i sastoji se od nekoliko segmenata koji se koriste u dijagnostičke svrhe (slika 4.1). Akvizicija i obrada ECG signala uz pomoć standardne opreme i senzora zahtijeva značajnu potrošnju energije, pri čemu trajanje baterije predstavlja jedan od ključnih izazova za dugoročnu upotrebu nosivih uređaja [50]. Implementacijom kompresivnog odabiranja ovaj proces se optimizuje i ubrzava, pri čemu se nasumično uzorkuje manji broj podataka, dok se na prijemnoj strani signal rekonstruiše primjenom odgovarajućeg algoritma. Studije pokazuju da primjena CS metode u ECG sensorima može povećati trajanje baterije za 37,1 %, što doprinosi energetskej efikasnosti i poboljšanju performansi nosivih medicinskih uređaja [50], [52].



Slika 4.1: ECG signal i najbitniji dijelovi signala

Također, CS se može efikasno primijeniti u procesu dijagnostike različitih neuroloških poremećaja, kao što su Alchajmerova bolest, epilepsija i drugi [50], [52]. Dijagnoza se često postavlja na osnovu elektroencefalogram (EEG) snimka mozga. Proces snimanja signala se vrši postavljanjem odgovarajućih senzora na glavu pacijenta, što omogućava prikupljanje podataka o moždanoj aktivnosti. U cilju prevazilaženja problema sa životnim vijekom baterije i smanjenja potrebnih računarskih resursa, signal se može komprimirati pomoću CS tehnike prije nego što se proslijedi na dalju obradu.

4.2 Primjena PCA

PCA analiza se široko primjenjuje u medicinskim istraživanjima i analizi biomedicinskih podataka [51]-[60]. Zbog obimnosti, kompleksnosti i velike količine ovih podataka, PCA se pokazuje kao izuzetno korisna tehnika. Primjena PCA omogućava jednostavniju interpretaciju podataka, kao i smanjenje zahtjeva za memorijskim resursima. Medicinske slike često imaju velike dimenzije i mogu biti podložne šumovima uzrokovanim faktorima poput pomjeranja pacijenta ili nedostataka opreme. U tom kontekstu, tehnika analize glavnih komponenti je izuzetno povoljna, jer omogućava izdvajanje najznačajnijih karakteristika slika, dok istovremeno eliminiše šum. Ekstraktovane informacije postaju lakše za tumačenje, čime se olakšava postavljanje dijagnoze ili analiza specifičnih tkiva i organa [53], [54].

Posljednjih godina sve veća pažnja posvećuje se elektronskim zdravstvenim kartonima (EHR), koji sadrže veliki broj podataka o pacijentima [55]. Kartoni uključuju razne informacije, kao što su istorija bolesti, laboratorijski nalazi, medicinske slike i druge relevantne podatke. Imajući u vidu obimnost ovih informacija, njihova analiza i interpretacija može biti zahtjevna. Korišćenjem tehnike analize glavnih komponenti, moguće je smanjiti broj varijabli na nekoliko ključnih komponenti koje sadrže najvažnije informacije o pacijentovom zdravstvenom stanju. Sa druge strane, kompresivno odabiranje može doprinijeti smanjenju dimenzionalnosti omogućavajući rekonstrukciju signala iz značajno manjeg skupa prikupljenih odbiraka. Uz to, napredne metode mašinskog učenja sve više koriste PCA za predikciju bolesti, prepoznavanjem obrazaca koji mogu ukazivati na mogućnost razvoja bolesti. Ovo može značajno doprinijeti ranom otkrivanju i potencijalnoj prevenciji bolesti [56], [57].

4.3 Kombinovanje PCA i CS

Kombinacija analize glavnih komponenti i kompresivnog odabiranja omogućava efikasnu redukciju dimenzionalnosti i rekonstrukciju signala korišćenjem značajno manje dostupnih odbiraka signala nego što je to bio slučaj u tradicionalnim načinima akvizicije signala [51], [60]. U radu [60] PCA analiza se koristi za pronalaženje transformacija koje sparsifikuju signal, što je neophodan uslov za primjenu kompresivnog odabiranja u cilju rekonstrukcije signala iz malog broja uzoraka. Ovakav način kombinovanja ove dvije metode je posebno pogodan za obradu nestacionarnih signala u realnom vremenu, gdje je važno očuvati ključne informacije uz minimalne resurse. Integracijom ovih tehnika poboljšava se tačnost rekonstrukcije, dok se istovremeno optimizuju skladištenje i prenos podataka, što je od posebnog značaja za obradu medicinskih podataka.

U ovoj tezi je primijenjen malo drugačiji pristup kombinaciji kompresivnog odabiranja i analize glavnih komponenti. Prvo je korišćen CS pristup za rekonstrukciju slika sa nedostajućim pikselima, uz nastojanje da se iz ograničenog broja dostupnih podataka rekonstruiše što vjerodostojniji prikaz originalne slike. Nakon toga, primijenjena je PCA analiza kako bi se dodatno smanjila dimenzionalnost slike, uz očuvanje njenih ključnih karakteristika. Očekuje se da slike rekonstruisane kombinacijom pristupa PCA i CS-a zadrže visok kvalitet i budu pogodne za dalju analizu. Korišćenjem kombinacije ovih

pristupa, dimenzionalnost podataka se značajno smanjuje uz minimalan gubitak vizuelnih i strukturnih informacija, što je pokazano mjerenjem kvaliteta slike korišćenjem mjera kao što su Peak Signal-to-Noise Ratio i Structural Similarity Index Measure.

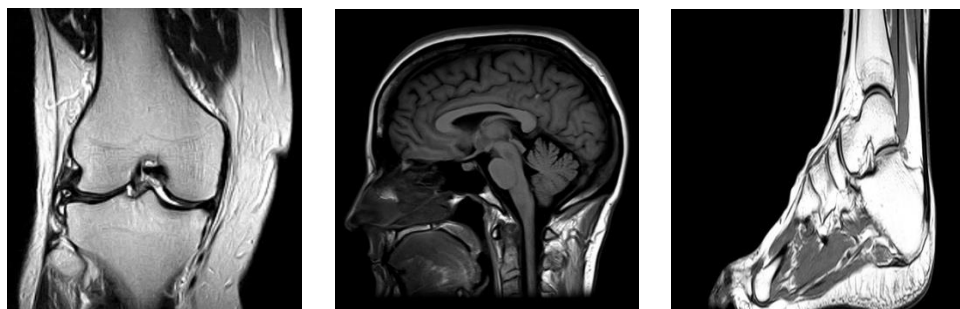
5. Eksperimentalni rezultati

U ovom poglavlju biće prikazani i analizirani eksperimentalni rezultati primjene PCA na prethodno pododabranim biomedicinskim slikama, koristeći MATLAB programsko okruženje. Pododabiranje slika podrazumeva uklanjanje određenog broja piksela, koji su nasumično odabrani. Procenat uklonjenih piksela u eksperimentalnim rezultatima varira od 30% do 70%. Eksperimenti će se sprovoditi na slikama različitih rezolucija, uključujući 128×128, 256×256 i 512×512 piksela.

Za testiranje kvaliteta rekonstrukcije pododabranih slika posmatrana su dva često primjenjivana algoritma: gradijentni algoritam, koji pripada grupi konveksnih optimizacija i TwIST algoritam, koji pripada tzv. *greedy* grupi. Posebna pažnja je posvećena odabiru adekvatnog transformacionog domena koji će se koristiti pri rekonstrukciji. Fokus je na DFT i DCT transformaciji. Nakon rekonstrukcije slika, primjenjena je PCA analiza sa ciljem određivanja minimalnog broja PCA komponenti koji se može uzeti od pododabrane a zatim rekonstruisane slike, a da se zadrže bitne informacije o slici. Tokom PCA analize uzimano je od 10 do 50 glavnih komponenti. Posebna pažnja je posvećena mjerenju vremena potrebnog za izvršavanje ovih algoritama, kako bi se procijenila njihova efikasnost u različitim uslovima.

Kvalitet rekonstruisane slike je mjeren pomoću često korišćenih metrika a to su pik-odnos-signal-šum - PSNR i mjera indeksa strukturne sličnosti - SSIM, koje omogućavaju kvantitativnu i perceptualnu procjenu kvaliteta slike. Na osnovu ovih metrika, rezultati će biti detaljno analizirani kako bi se utvrdila efikasnost oba algoritma u zadržavanju kvaliteta slike i minimizaciji gubitka informacija nakon PCA kompresije. Ova analiza će pružiti uvid u optimalne pristupe za rekonstrukciju biomedicinskih slika pod različitim uslovima degradacije (tj. u uslovima različitog procenta dostupnih piksela) i u slučajevima slika različitih veličina.

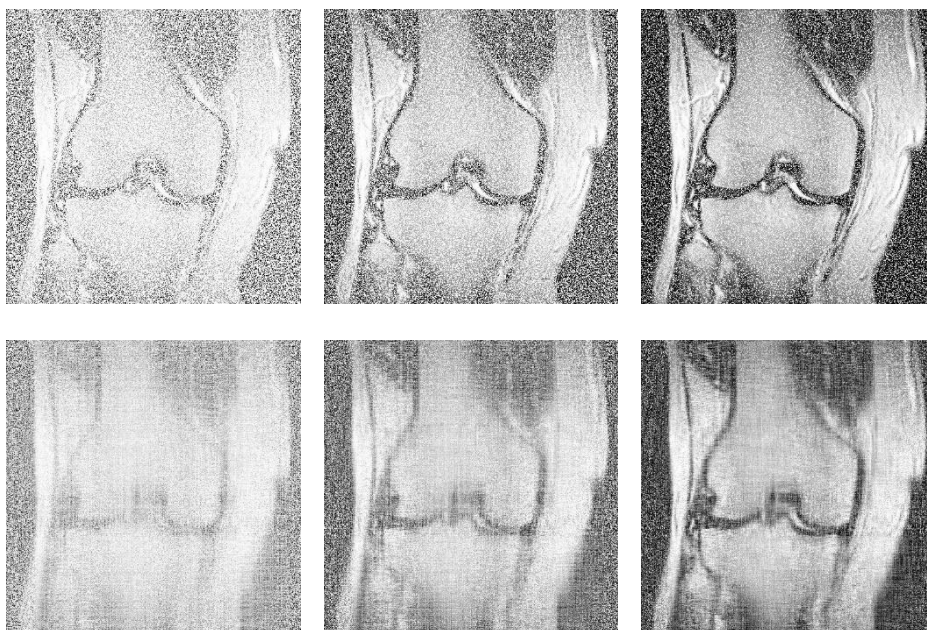
Za analizu i prikupljanje rezultata korišće se biomedicinske slike prikazane na slici 5.1:



Slika 5.1: MRI koljena, glave i stopala

5.1 PCA analiza na oštećenoj slici:

Budući da PCA analiza smanjuje dimenzionalnost slike bez unapređenja njenog kvaliteta, sasvim je očekivano da rezultati rekonstrukcije oštećene slike nakon PCA analize neće biti zadovoljavajući. U nastavku su prikazane oštećene slike koljena rezolucije 512×512 piksela , kao i rezultati dobijeni primjenom PCA analize pri čemu je korišćeno 50 glavnih komponenti:



Slika 5.2: Prva vrsta - oštećene slike, druga vrsta - rezultati nakon PCA analize. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

Kao što je uočljivo, kvalitet rekonstruisanih slika je izuzetno nizak, što se odražava i kroz očekivano niske PSNR i SSIM vrijednosti. U sljedećoj tabeli su prikazani rezultati PCA analize slike koljena rezolucije 512×512 uz sve kombinacije oštećenja i broja glavnih komponenti:

| PCA analiza na oštećenoj slici | Nedostajući pikseli [%] | Glavne komponente | SSIM | PSNR [dB] |
|--------------------------------------|-------------------------|----------------------|--------|--------------|
| | 70 | 10 | 0.1616 | 6.9288 |
| | | 30 | 0.1071 | 6.8312 |
| | | 50 | 0.091 | 6.7497 |
| | 50 | 10 | 0.1778 | 9.4176 |
| | | 30 | 0.1196 | 9.0718 |
| | | 50 | 0.1031 | 8.8182 |
| | 30 | 10 | 0.2389 | 13.0515 |
| | | 30 | 0.1694 | 12.3001 |
| | | 50 | 0.1474 | 11.7805 |

Tabela 5.1: Rezultati PCA analize primijenjene na oštećenoj slici koljena rezolucije 512×512

5.2 Primjena gradijentnog algoritma i PCA analize u rekonstrukciji i izdvajanju bitnih karakteristika iz biomedicinskih slika

5.2.1 DCT transformacioni domen

U nastavku su prikazani rezultati analize gradijentnog algoritma, izvedenog na blokovima od 16×16 piksela, u rekonstrukciji biomedicinskih slika, pri čemu je korišćen DCT domen kao domen rijetkosti. Prvo ćemo posmatrati MRI sliku koljena. Na slici 5.2 prikazane su MRI slike koljena sa različitim stepenima oštećenja (nedostajući pikseli). Prvo ćemo prikazati rezultate koji se odnose na sliku u najmanjoj rezoluciji koju ćemo posmatrati u ovom radu, a to je 128×128 piksela:



Slika 5.3: Primjeri oštećenih slika rezolucije 128×128. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

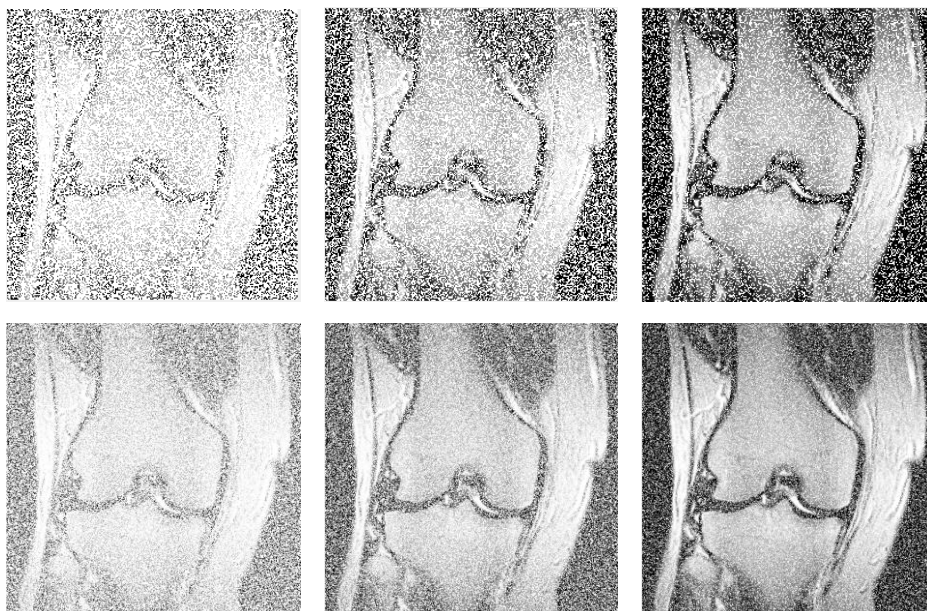
Nakon primjene gradijentnog algoritma, rekonstrukcija ovih slika dala je sljedeće rezultate:



Slika 5.4: Slike rezolucije 128×128 nakon rekonstrukcije primjenom gradijentnog algoritma. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

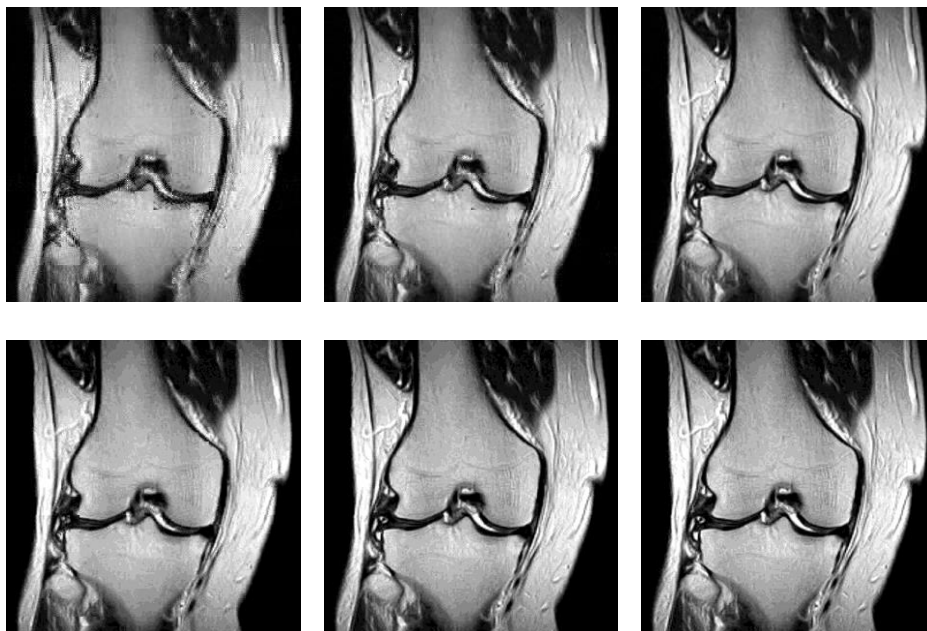
Uočavamo da se nakon rekonstrukcije slika sa 70% i 50% nedostajućih piksela dolazi do zamućenja, što je rezultat nedostatka informacija tokom procesa rekonstrukcije. Kao što je očekivano, kvalitet rekonstruisane slike se poboljšava smanjenjem procenta nedostajućih piksela, pri čemu se slika sa 30% nedostajućih piksela može vrlo vjerno rekonstruisati.

U nastavku ćemo analizirati oštećene slike većih rezolucija, kao što su 256×256 i 512×512 piksela:



Slika 5.5: Primjeri oštećenih slika rezolucija 256×256 (prva vrsta) i 512×512 (druga vrsta). Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

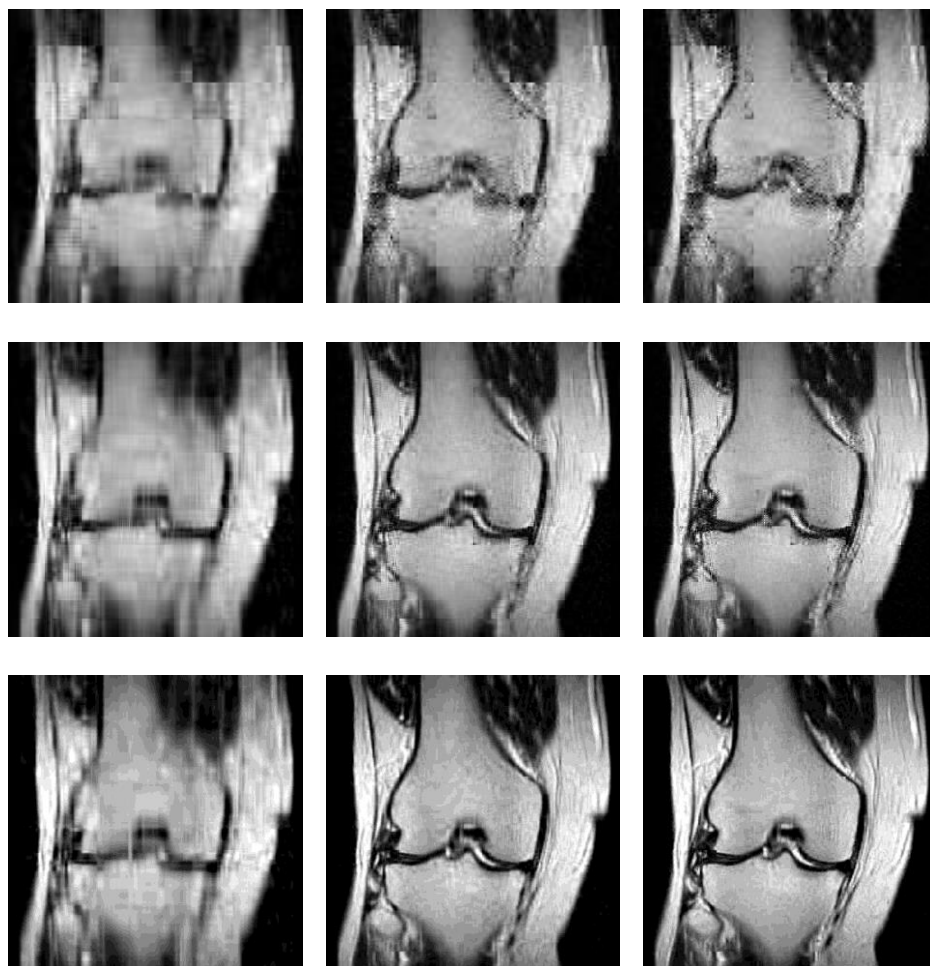
Nakon rekonstrukcije gradijentnim algoritmom, dobijeni su sljedeći rezultati:



Slika 5.6: Slike nakon rekonstrukcije primjenom gradijentnog algoritma: 256×256 (prva vrsta) i 512×512 (druga vrsta). Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

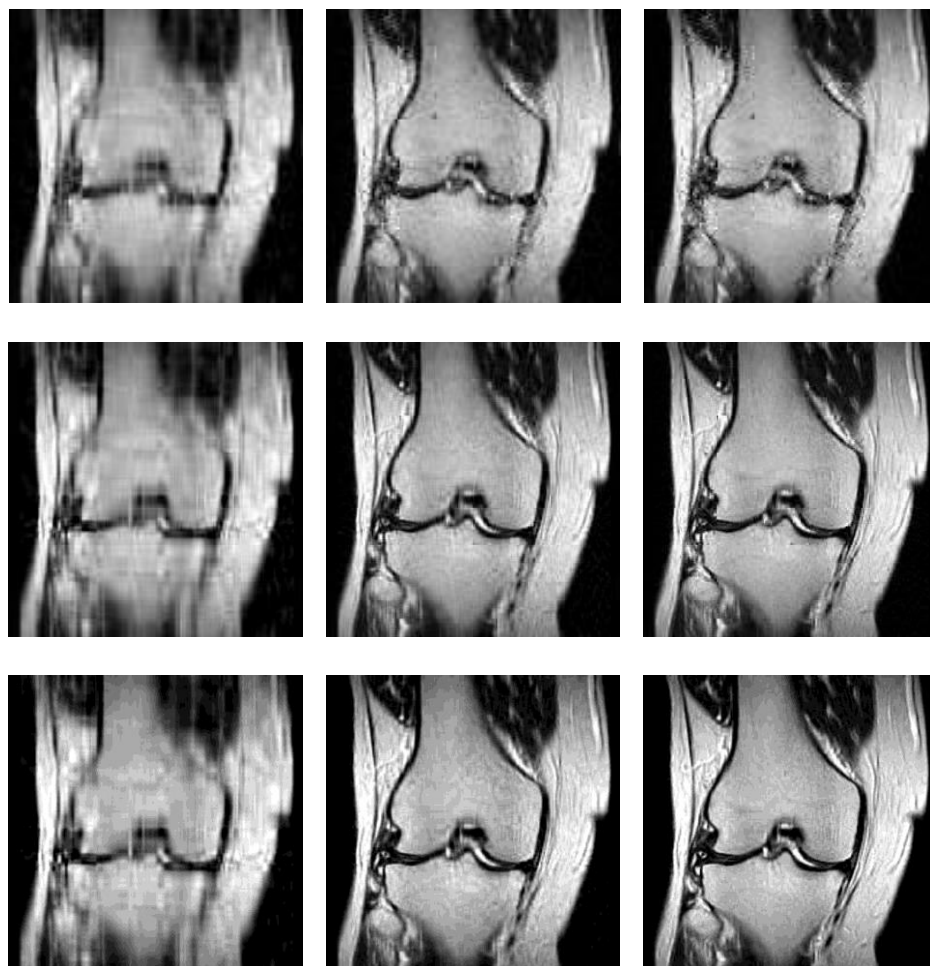
Vizuelno se može primijetiti da su sve slike vrlo vjerno rekonstruisane, osim u slučaju slike sa rezolucijom 256×256 i 70% nedostajućih piksela, gdje je vidljiv blagi nedostatak detalja u rekonstruisanoj slici.

PCA analizom rekonstruisanih slika sa 70% nedostajućih piksela, pri čemu je transformacija izvedena na 10, 30 i 50 glavnih komponenti, dobijeni su rezultati prikazani na slici 5.7. Primjećujemo da, bez obzira na broj glavnih komponenti, rekonstrukcija slike rezolucije 128×128 ne postiže zadovoljavajući kvalitet. Nasuprot tome, za slike rezolucija 256×256 i 512×512 možemo zaključiti da već sa 30 glavnih komponenti dostižu kvalitet blizak originalu.



Slika 5.7: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 70% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

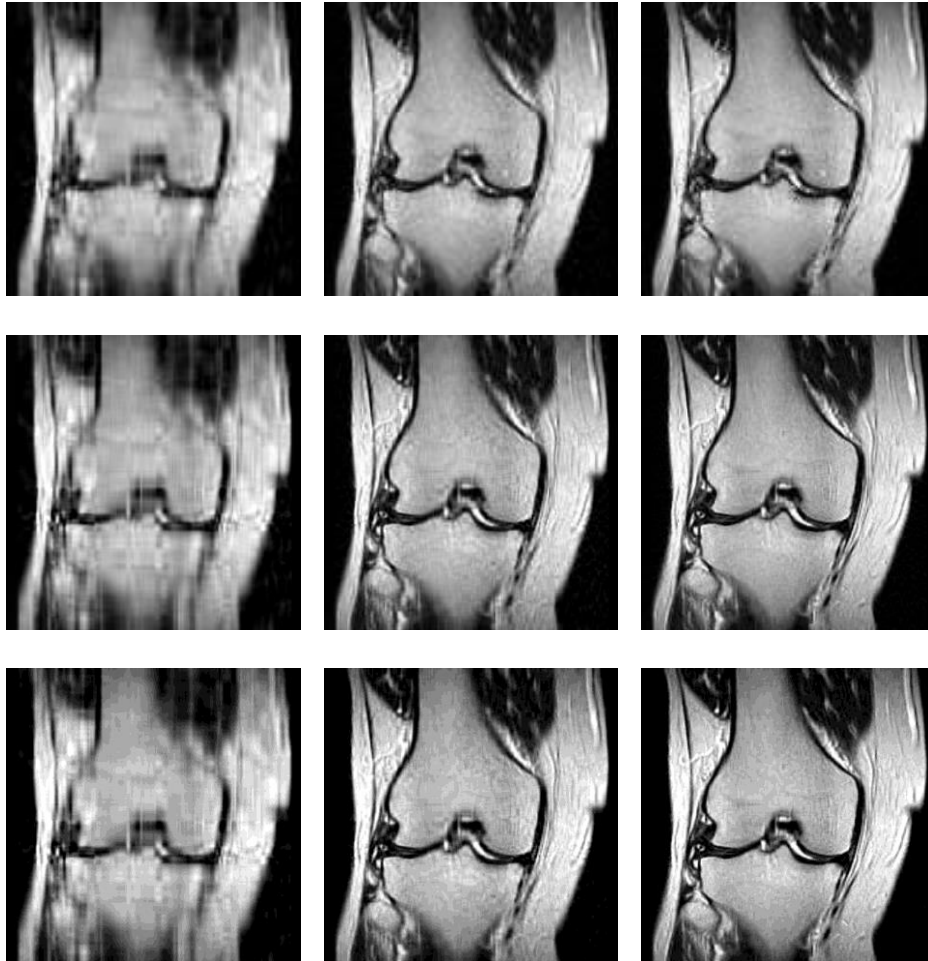
Nakon PCA analize, rekonstruisane slike sa 50% nedostajućih piksela izgledaju kao na slici 5.8:



Slika 5.8: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Očekivano je da PCA analiza daje bolje rezultate za slike rekonstruisane sa manjim stepenom oštećenja. U ovom slučaju, kod slike rezolucije 128×128 primjećujemo da su detalji izraženiji, a pojava nedostajućih piksela manje uočljiva u poređenju sa prethodnim slučajem sa 70% oštećenja. Kao i ranije, slike rezolucija 256×256 i 512×512 rekonstruisane sa 30 i 50 glavnih komponenti pokazuju visoku preciznost i kvalitet.

U posljednjem slučaju, gdje se rekonstruišu slike sa 30% nedostajućih piksela, rezultati nakon PCA analize su prikazani na slici 5.9.



Slika 5.9: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 30% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128 , druga vrsta - slike dimenzija 256×256 , treća vrsta – slike dimenzija 512×512 . Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Na osnovu prikazanih rezultata, primjećujemo da se pojava “razlivenih” piksela kod slike rezolucije 128×128 gotovo u potpunosti gubi, što rezultira slikom koja je vrlo bliska originalu. Očekivano, slike veće rezolucije pokazuju bolje rezultate prilikom rekonstrukcije sa istim procentom uzetih mjerenja.

Preciznije zaključke možemo donijeti na osnovu SSIM i PSNR vrijednosti. Tabela 5.2 prikazuje SSIM i PSNR vrijednosti nakon PCA analize, kao i vrijeme potrebno za rekonstrukciju gradijentnim algoritmom.

| PCA analiza na rekonstruisanoj slici | Nedostajući pikseli [%] | Rezolucija | Glavne komponente | SSIM | PSNR [dB] | Vrijeme [s] |
|--------------------------------------|-------------------------|------------|-------------------|---------|-----------|-------------|
| | 70 | 128×128 | 10 | 0.5802 | 19.5884 | 13.6367 |
| | | | 30 | 0.6227 | 20.3398 | |
| | | | 50 | 0.6318 | 20.1717 | |
| | | 256×256 | 10 | 0.5595 | 20.232 | 43.0077 |
| | | | 30 | 0.6854 | 23.4866 | |
| | | | 50 | 0.7093 | 23.7798 | |
| | | 512×512 | 10 | 0.5808 | 20.4986 | 179.482 |
| | | | 30 | 0.7228 | 25.9814 | |
| | | | 50 | 0.797 | 28.2669 | |
| 50 | 128×128 | 10 | 0.6454 | 20.9181 | 10.5538 | |
| | | 30 | 0.7705 | 23.8938 | | |
| | | 50 | 0.7957 | 23.9639 | | |
| | 256×256 | 10 | 0.5847 | 20.6872 | 35.2513 | |
| | | 30 | 0.7619 | 26.159 | | |
| | | 50 | 0.8292 | 28.1381 | | |
| | 512×512 | 10 | 0.5895 | 20.6286 | 117.934 | |
| | | 30 | 0.7521 | 26.935 | | |
| | | 50 | 0.847 | 30.9346 | | |
| 30 | 128×128 | 10 | 0.6733 | 21.4886 | 7.0908 | |
| | | 30 | 0.8518 | 27.3131 | | |
| | | 50 | 0.8965 | 28.4442 | | |
| | 256×256 | 10 | 0.593 | 20.8068 | 21.8382 | |
| | | 30 | 0.7849 | 27.2497 | | |
| | | 50 | 0.8725 | 30.9244 | | |
| | 512×512 | 10 | 0.5918 | 20.6448 | 73.5898 | |
| | | 30 | 0.7575 | 27.0943 | | |
| | | 50 | 0.8564 | 31.5303 | | |

Tabela 5.2: Rezultati PCA analize primijenjene na slici koljena – gradijentni algoritam (DCT domen)

Iz Tabele 5.2 se može uočiti da se vrijeme rekonstrukcije gradijentnim algoritmom smanjuje sa smanjenjem broja nedostajućih piksela. Ovaj rezultat je očekivan, budući da algoritmu treba manje iteracija da bi postigao zadovoljavajuću rekonstrukciju kada je na raspolaganju veći broj dostupnih piksela. Takođe, povećanjem rezolucije dolazi do povećanja vremena rekonstrukcije, jer veći broj podataka zahtijeva obimniju obradu.

Možemo zaključiti da povećanjem broja glavnih komponenti dolazi do poboljšanja

kvaliteta rekonstruisane slike, što je evidentno kroz porast PSNR i SSIM vrijednosti. PSNR vrijednosti iznad 30 dB, kao i SSIM vrijednosti iznad 0.8, ukazuju na visok kvalitet rekonstrukcije, odnosno sličnosti sa originalom. Ipak, postoji izuzetak kod slike rezolucije 128×128 i 70% nedostajućih piksela, gdje je PSNR nešto viši za rekonstrukciju sa 30 glavnih komponenti nego sa 50 glavnih komponenti, ali je ta razlika zanemarljiva i iznosi samo 0.1681 dB. Ova pojava se najčešće javlja kod slika niske rezolucije, gdje veći broj glavnih komponenti može povećati šum umjesto korisnih informacija, što rezultira manjim PSNR-om. PSNR vrijednosti rastu od 19.5884 dB (70% nedostajućih piksela, rezolucija 128×128 i 10 glavnih komponenti) u najgorem slučaju, do 31.5303 dB (30% nedostajućih piksela, rezolucija 512×512 i 50 glavnih komponenti) u najboljem slučaju. Vrijednosti PSNR-a iznad 30 dB postižu se i kod slika rezolucije 256×256 sa 30% nedostajućih piksela, kao i rezolucije 512×512 sa 50% nedostajućih piksela, kada se koriste 50 glavnih komponenti.

Rezolucija slike takođe ima značajan uticaj na kvalitet rekonstrukcije. Slike veće rezolucije sadrže više informacija, što omogućava bolju rekonstrukciju i veću sličnost sa originalnom slikom. PSNR vrijednosti su veće za slike veće rezolucije pri istom broju glavnih komponenti. U slučaju SSIM-a, primijećuje se manji pad vrijednosti sa porastom rezolucije, posebno izražen kod 30% nedostajućih piksela pri istom broju glavnih komponenti. To sugerise da se u određenim situacijama može postići bolja strukturalna sličnost pri nižim rezolucijama, što odstupa od opšteg trenda poboljšanja kvaliteta sa povećanjem rezolucije. Najveća SSIM vrijednost, 0.8965, postiže se kombinacijom najmanje rezolucije (128×128), najvećeg broja glavnih komponenti (50), i najmanjeg broja nedostajućih piksela (30%).

Smanjenjem broja nedostajućih piksela, povećava se i kvalitet rekonstruisane slike. Manji broj nedostajućih podataka omogućava rekonstrukciju slike sa više detalja i manje gubitaka. Što se tiče slika glave i stopala, rezultati su prikazani u tabeli 5.3.

| | | Nedostajući pikseli [%] | Rezolucija | Glavne komponente | SSIM | PSNR[dB] | Vrijeme [s] |
|---|----------------|-------------------------|------------|-------------------|----------|----------|-------------|
| | | | | | | | |
| PCA analiza na rekonstruisanoj slici | Stopalo | 70 | 128×128 | 10 | 0.613 | 18.99 | 30.712 |
| | | | | 30 | 0.6517 | 20.013 | |
| | | | | 50 | 0.663 | 19.806 | |
| | | | 256×256 | 10 | 0.6098 | 19.2062 | 94.335 |
| | | | | 30 | 0.6866 | 21.9307 | |
| | | | | 50 | 0.7002 | 22.2244 | |
| | | 512×512 | 10 | 0.6236 | 19.5508 | 498.7624 | |
| | | | 30 | 0.7217 | 24.4894 | | |
| | | | 50 | 0.7814 | 26.6817 | | |
| | | 50 | 128×128 | 10 | 0.6747 | 20.1814 | 22.8771 |
| | | | | 30 | 0.776 | 23.0643 | |
| | | | | 50 | 0.8116 | 23.175 | |
| | 256×256 | | 10 | 0.6481 | 19.7679 | 89.484 | |
| | | | 30 | 0.7659 | 24.6832 | | |
| | | | 50 | 0.8239 | 26.4793 | | |
| | 512×512 | 10 | 0.6485 | 19.6897 | 360.8981 | | |
| | | 30 | 0.7599 | 25.5071 | | | |
| | | 50 | 0.8363 | 29.499 | | | |
| | 30 | 128×128 | 10 | 0.7009 | 20.8799 | 12.7722 | |
| | | | 30 | 0.8443 | 26.68 | | |
| | | | 50 | 0.9029 | 28.0485 | | |
| | | 256×256 | 10 | 0.6575 | 19.9345 | 45.5634 | |
| | | | 30 | 0.7838 | 25.9112 | | |
| | | | 50 | 0.8595 | 29.5616 | | |
| 512×512 | | 10 | 0.6498 | 19.7129 | 164.8074 | | |
| | | 30 | 0.7613 | 25.7033 | | | |
| | | 50 | 0.8391 | 30.1815 | | | |
| Glava | 70 | 128×128 | 10 | 0.4832 | 20.2058 | 19.7266 | |
| | | | 30 | 0.5769 | 20.9386 | | |
| | | | 50 | 0.5911 | 20.8493 | | |
| | | 256×256 | 10 | 0.5256 | 21.1616 | 73.1967 | |
| | | | 30 | 0.674 | 24.2843 | | |
| | | | 50 | 0.7227 | 24.8494 | | |
| | 512×512 | 10 | 0.571 | 21.4918 | 300.7931 | | |
| | | 30 | 0.7207 | 26.5176 | | | |
| | | 50 | 0.8071 | 29.0672 | | | |
| | 50 | 128×128 | 10 | 0.5647 | 21.8588 | 16.184 | |
| | | | 30 | 0.7433 | 24.9499 | | |

| | | | | | | | |
|--|--|----|---------|----|--------|---------|----------|
| | | 30 | 256×256 | 50 | 0.7817 | 25.193 | 61.4784 |
| | | | | 10 | 0.5595 | 21.6377 | |
| | | | | 30 | 0.7488 | 26.7468 | |
| | | | 512×512 | 10 | 0.5824 | 21.6106 | 254.9627 |
| | | | | 30 | 0.7452 | 27.41 | |
| | | | | 50 | 0.8498 | 31.5545 | |
| | | | 128×128 | 10 | 0.6083 | 22.4354 | 11.1461 |
| | | | | 30 | 0.8235 | 27.8636 | |
| | | | | 50 | 0.8882 | 29.5296 | |
| | | | 256×256 | 10 | 0.5676 | 21.7567 | 35.5497 |
| | | | | 30 | 0.7705 | 27.6587 | |
| | | | | 50 | 0.8793 | 31.5401 | |
| | | | 512×512 | 10 | 0.5834 | 21.6262 | 127.0658 |
| | | | | 30 | 0.7454 | 27.5533 | |
| | | | | 50 | 0.8526 | 32.0496 | |

Tabela 5.3: Rezultati PCA analize primijenjene na slikama stopala i glave – gradijentni algoritam (DCT domen)

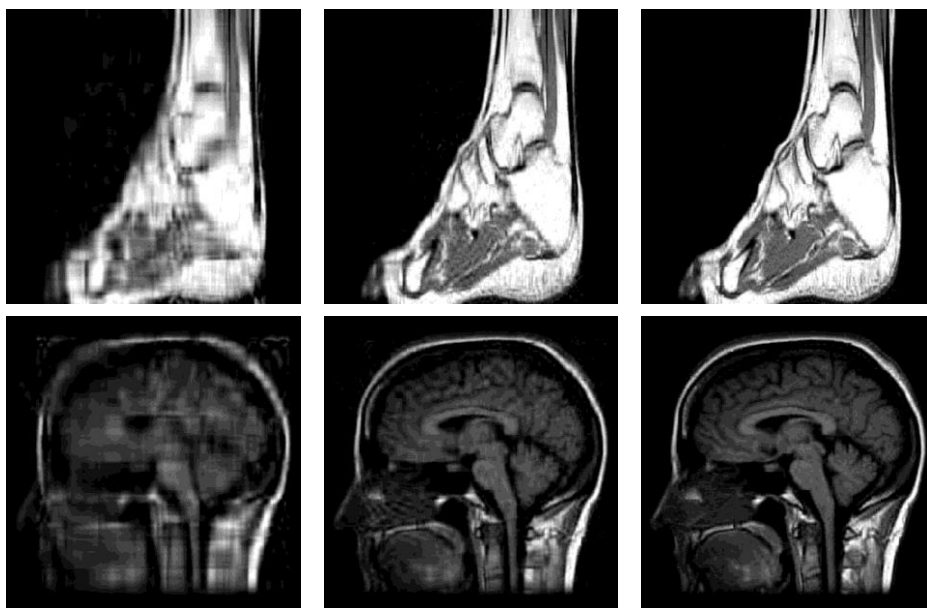
Vrijeme rekonstrukcije slika stopala i glave povećava se s porastom rezolucije i procenta nedostajućih piksela. Najduže vrijeme rekonstrukcije zabilježeno je za sliku stopala rezolucije 512×512 sa 70% nedostajućih piksela, koje iznosi 498.8 sekundi. Nasuprot tome, najkraće vrijeme rekonstrukcije zabilježeno je za sliku glave rezolucije 128×128 sa 30% nedostajućih piksela, koje iznosi 11.1 sekundi.

Slični zaključci se mogu donijeti i za ove slike, kao i za MRI sliku koljena. PSNR raste sa povećanjem broja glavnih komponenti i rezolucije, kao i smanjenjem broja nedostajućih piksela. Izuzetak predstavlja slika rezolucije 128×128 sa 70% nedostajućih piksela, gdje se kod obje slike dobija niža PSNR vrijednost za 50 glavnih komponenti u poređenju sa 30. Kod slike stopala ova razlika iznosi 0.207 dB, dok je kod slike glave vrlo mala i iznosi 0.0893 dB. Najveća PSNR vrijednost postignuta je analizom slike glave rezolucije 512×512 sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti, i iznosi 32.0496 dB. Ova vrijednost je za 0.5193 dB veća od one za sliku koljena, dok je u poređenju sa slikom stopala razlika znatnija i iznosi 1.8681 dB. Što se tiče SSIM, primjećuju se odstupanja u pogledu smanjenja SSIM vrijednosti sa porastom rezolucije, pri istom broju nedostajućih piksela i glavnih komponenti. Najveće odstupanje je primijećeno kod slike stopala, gdje je SSIM vrijednost slike rezolucije 512×512 manja u odnosu na sliku

rezolucije 128×128 , pri 50% nedostajućih piksela i 30 glavnih komponenti, za 0.083. Najviša izmjerena vrijednost SSIM indeksa zabilježena je kod slike stopala rezolucije 512×512 , sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti, i iznosi 0.9029, što predstavlja najvišu vrijednost među sve tri analizirane slike.

Iz rezultata zaključujemo da je moguće postići PSNR veći od 30 dB sa najmanje 50 glavnih komponenti. Kod slike stopala, to je ostvareno samo za rezoluciju 512×512 sa 30% nedostajućih piksela, dok je kod slika koljena i glave ovaj prag moguće dostići i pri istom broju nedostajućih piksela sa rezolucijom 256×256 , kao i za rezoluciju 512×512 sa 50% nedostajućih piksela. SSIM indeks veći od 0.8 za sliku sa 70% nedostajućih piksela postignut je samo za sliku glave rezolucije 512×512 sa 50 glavnih komponenti. Za manji broj nedostajućih piksela, vrijednost SSIM indeksa od 0.8 se uglavnom postiže kod svih rezolucija, najčešće uz 50 glavnih komponenti. Vrijednost od 0.8 nije moguće postići sa 10 glavnih komponenti, bez obzira na podešavanje ostalih parametara.

Na slici 5.10 prikazani su rezultati nakon PCA analize slika stopala i glave rekonstruisanih sa 50% nedostajućih piksela rezolucije 512×512 .



Slika 5.10: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slika stopala dimenzija 512×512 , druga vrsta – slika glave dimenzija 512×512 . Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

5.2.2 DFT transformacioni domen

U ovom dijelu rada, analiziramo rezultate primjene gradijentnog algoritma, takođe izvedenog na blokovima od 16×16 piksela, u rekonstrukciji biomedicinskih slika korišćenjem DFT domena kao alternativnog domena rijetkosti. Oštećene slike koljena rezolucije 128×128 izgledaju ovako:



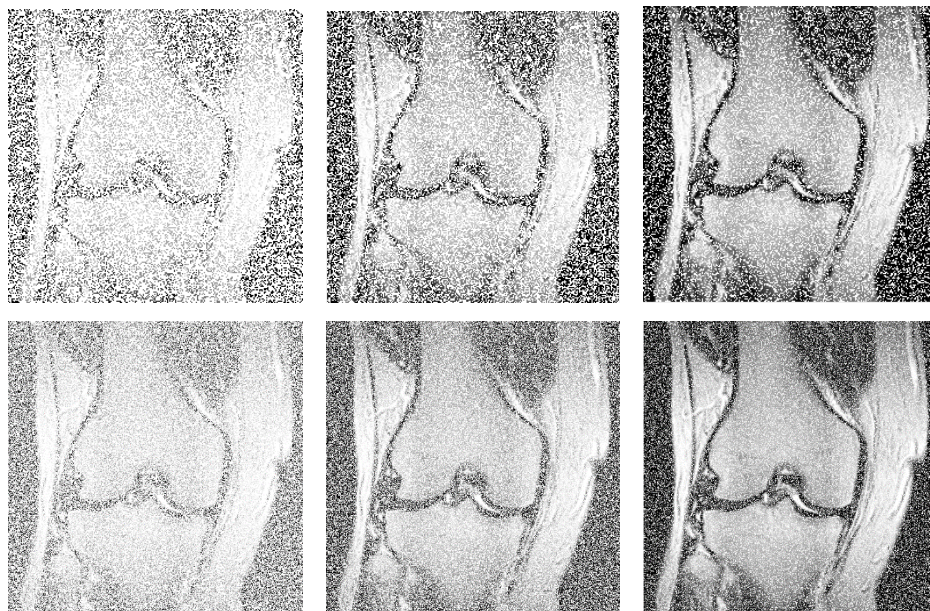
Slika 5.11: Primjeri oštećenih slika rezolucije 128×128 . Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

Nakon primjene gradijentnog algoritma, rekonstrukcija ovih slika dala je sljedeće rezultate:



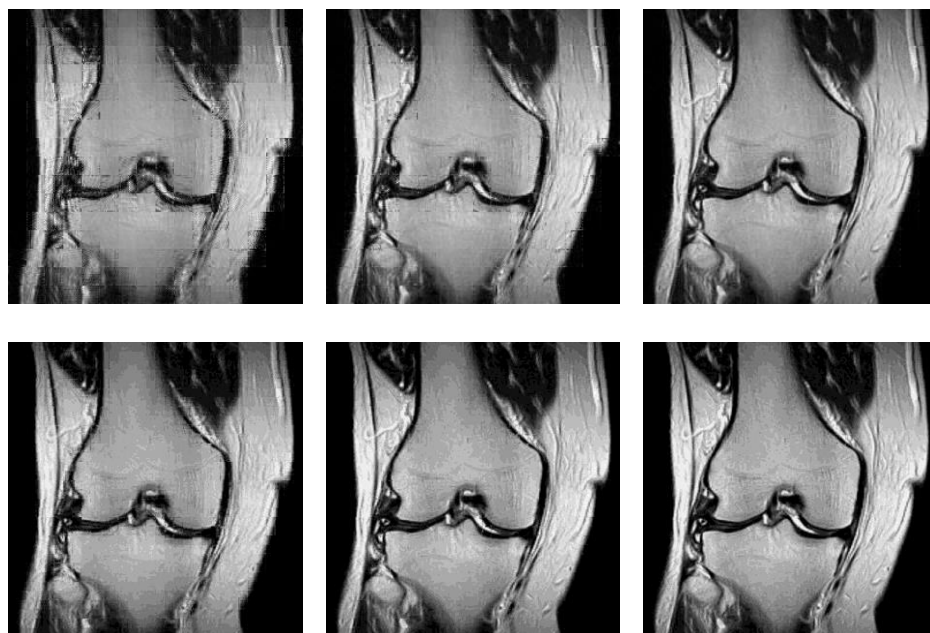
Slika 5.12: Slike rezolucije 128×128 nakon rekonstrukcije primjenom gradijentnog algoritma. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

Uočena je pojava razlivenih piksela i zamućenja slike kao posljedica nedostatka informacija tokom procesa rekonstrukcije, što je posebno izraženo kod slika sa 70% i 50% nedostajućih piksela. S druge strane, slika sa 30% nedostajućih piksela je relativno dobro rekonstruisana. Kvalitet rekonstrukcije je, međutim, blago lošiji u poređenju sa rezultatima dobijenim primjenom DCT transformacionog domena. U nastavku ćemo analizirati oštećene slike rezolucija 256×256 i 512×512 piksela:



Slika 5.13: Primjeri oštećenih slika rezolucija 256×256 (prva vrsta) i 512×512 (druga vrsta). Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

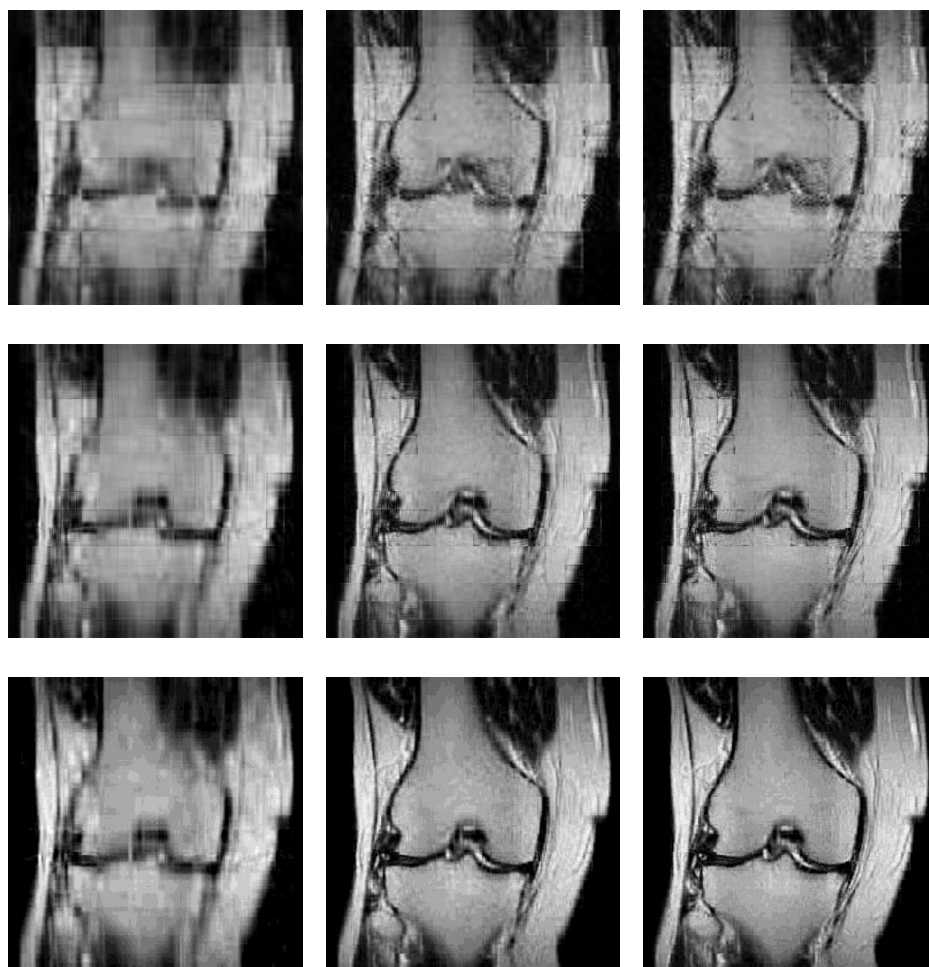
Sljedeći rezultati dobijeni su rekonstrukcijom pomoću gradijentnog algoritma:



Slika 5.14: Slike nakon rekonstrukcije primjenom gradijentnog algoritma: 256×256 (prva vrsta) i 512×512 (druga vrsta). Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

Kao i u slučaju primjene DCT transformacionog domena, dobijene slike možemo vizuelno ocijeniti kao vjerno rekonstruisane, s izuzetkom slike rezolucije 256×256 sa 70%

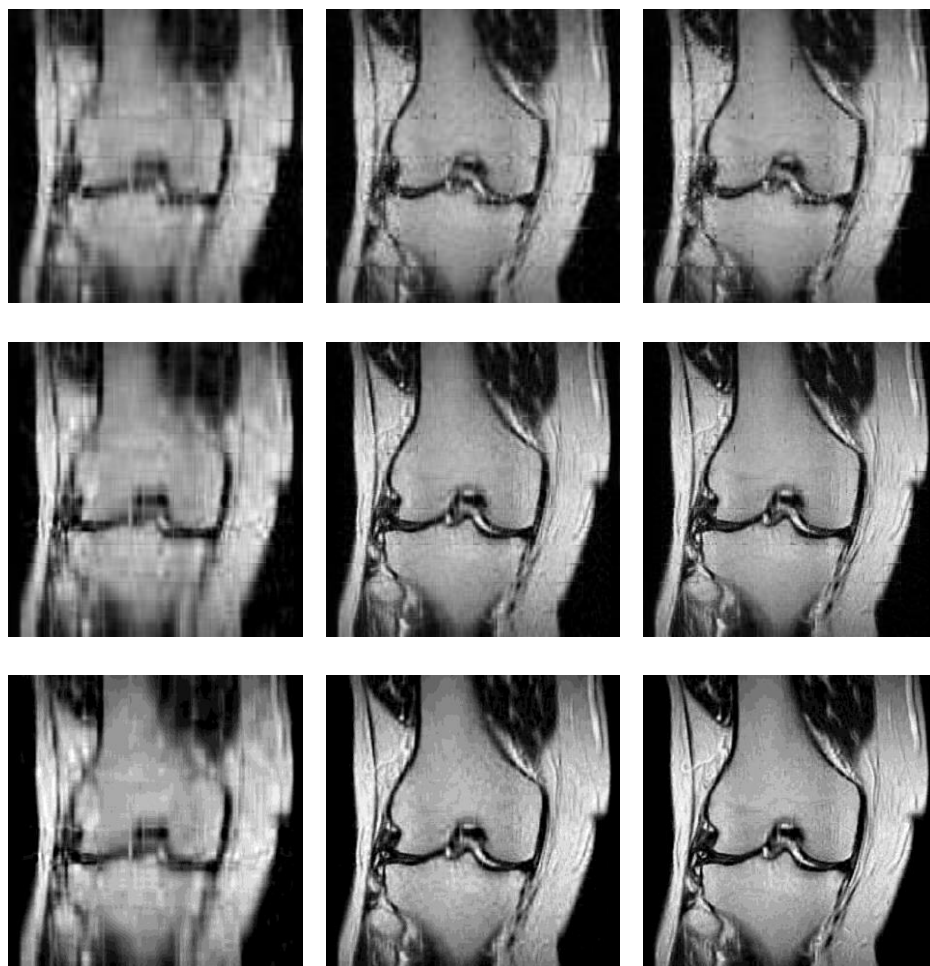
nedostajućih piksela, koja se može ocijeniti kao blago zamućena. PCA analizom slika sa 70% nedostajućih piksela, dobijeni su sljedeći rezultati:



Slika 5.15: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 70% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Primjećuje se da slike rezolucije 128×128, bez obzira na broj glavnih komponenti, rezultiraju vrlo niskim kvalitetom rekonstrukcije. Kod slika rezolucije 256×256, rekonstrukcija postaje sličnija originalu već sa 30 glavnih komponenti, iako je primjetno blago odsustvo piksela. Kod slika najveće rezolucije, postignut je vrlo visok kvalitet rekonstrukcije pri istom broju glavnih komponenti.

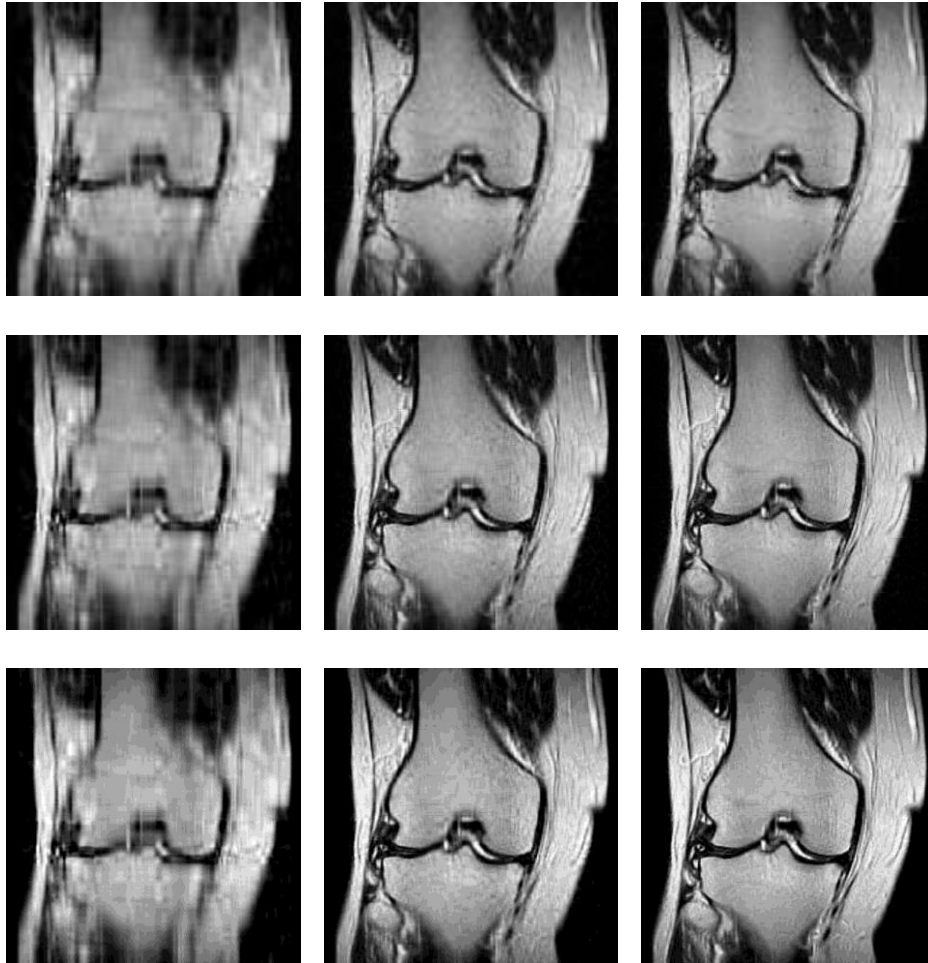
Rekonstruisane slike sa 50% nedostajućih piksela nakon PCA analize izgledaju ovako:



Slika 5.16: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

U ovom slučaju, slike rezolucije 128×128 takođe pokazuju nizak kvalitet rekonstrukcije, dok slike rezolucija 256×256 i 512×512 postaju vrlo slične originalu već sa 30 glavnih komponenti.

U posljednjem slučaju gdje vršimo PCA analizu nad slikom sa 30% nedostajućih piksela, dobijeni su sljedeći rezultati:



Slika 5.17: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 30% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128 , druga vrsta - slike dimenzija 256×256 , treća vrsta – slike dimenzija 512×512 . Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Kao i u prethodnom primjeru gdje je korišćen DCT domen, bez obzira na rezoluciju slike, sa 30 glavnih komponenti pojava nedostajućih piksela se gotovo u potpunosti gubi, a kvalitet rekonstrukcije postaje vrlo visok.

SSIM i PSNR vrijednosti, kao i vremena rekonstrukcije gradientim algoritmom dati su sljedećom tabelom:

| PCA analiza na rekonstruisanoj slici | Nedostajući pikseli [%] | Rezolucija | Glavne komponente | SSIM | PSNR [dB] | Vrijeme [s] |
|--------------------------------------|-------------------------|------------|-------------------|---------|-----------|-------------|
| | 70 | 128×128 | 10 | 0.5192 | 17.6689 | 63.3122 |
| | | | 30 | 0.5704 | 18.3003 | |
| | | | 50 | 0.5738 | 18.2224 | |
| | | 256×256 | 10 | 0.5238 | 18.402 | 218.064 |
| | | | 30 | 0.6306 | 20.112 | |
| | | | 50 | 0.6599 | 20.3017 | |
| | | 512×512 | 10 | 0.5639 | 19.1878 | 758.5799 |
| | | | 30 | 0.684 | 22.104 | |
| | | | 50 | 0.7421 | 22.7756 | |
| 50 | 128×128 | 10 | 0.6066 | 19.0728 | 39.3075 | |
| | | 30 | 0.7294 | 20.8274 | | |
| | | 50 | 0.7501 | 20.9248 | | |
| | 256×256 | 10 | 0.5682 | 19.769 | 138.5551 | |
| | | 30 | 0.7305 | 23.3303 | | |
| | | 50 | 0.792 | 24.1913 | | |
| | 512×512 | 10 | 0.5849 | 19.9426 | 440.4064 | |
| | | 30 | 0.7366 | 24.3561 | | |
| | | 50 | 0.8197 | 25.9958 | | |
| 30 | 128×128 | 10 | 0.6456 | 19.7583 | 24.5057 | |
| | | 30 | 0.8149 | 22.6387 | | |
| | | 50 | 0.8524 | 22.9914 | | |
| | 256×256 | 10 | 0.5851 | 19.5596 | 78.929 | |
| | | 30 | 0.7695 | 23.2304 | | |
| | | 50 | 0.8504 | 24.3064 | | |
| | 512×512 | 10 | 0.5909 | 19.9906 | 241.0563 | |
| | | 30 | 0.7528 | 24.6751 | | |
| | | 50 | 0.8466 | 26.6277 | | |

Tabela 5.4: Rezultati PCA analize primijenjene na slici koljena – gradijentni algoritam (DFT domen)

Prvo što se primjećuje jeste da je vrijeme rekonstrukcije korišćenjem gradijentnog algoritma značajno duže u poređenju sa rekonstrukcijom u DCT domenu. Ovakav rezultat je očekivan, budući da je DCT domen efikasniji u komprimovanju ključnih informacija za rekonstrukciju slike, čime omogućava bržu i manje zahtjevnu obradu.

Poređenjem ovih rezultata sa rezultatima dobijenim analizom slike koljena primjenom PCA u DCT domenu, uočavaju se slični trendovi u rastu i padu performansi, ali su rezultati u DFT domenu lošiji. Najviša PSNR vrijednost postignuta u ovom

eksperimentu je 26.6277 dB, za rekonstruisanu sliku rezolucije 512×512 sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti. U poređenju sa rezultatom u DCT domenu, razlika je značajna i iznosi 4.9026 dB u korist DCT-a.

Što se tiče SSIM indeksa, rezultati su takođe primjetno lošiji u DFT domenu. Maksimalna SSIM vrijednost od 0.8524 postignuta je za sliku rezolucije 128×128 sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti, dok je za iste parametre u DCT domenu ostvarena veća vrijednost od 0.8965.

Rezultati nakon PCA analize slika stopala i glave prikazani su u tabeli 5.5:

| | | Nedostajući pikseli [%] | Rezolucija | Glavne komponente | SSIM | PSNR[dB] | Vrijeme [s] |
|--------------------------------------|---------|-------------------------|------------|-------------------|----------|----------|-------------|
| | | | | | | | |
| PCA analiza na rekonstruisanoj slici | Stopalo | 70 | 128x128 | 10 | 0.6057 | 17.4469 | 63.6099 |
| | | | | 30 | 0.663 | 18.2647 | |
| | | | | 50 | 0.678 | 18.2096 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.6077 | 17.1128 | 238.9264 |
| | | | | 30 | 0.6893 | 18.5269 | |
| | | | | 50 | 0.7105 | 18.6968 | |
| | | | 512x512 | 10 | 0.6281 | 17.3111 | 969.0883 |
| | | | | 30 | 0.7198 | 19.3308 | |
| | | | | 50 | 0.7706 | 19.8248 | |
| | | 50 | 128x128 | 10 | 0.657 | 18.7631 | 40.4943 |
| | | | | 30 | 0.7541 | 20.7623 | |
| | | | | 50 | 0.7872 | 20.9254 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.6331 | 18.0124 | 151.9345 |
| | | | | 30 | 0.7492 | 20.5123 | |
| | | | | 50 | 0.8026 | 21.1284 | |
| | | | 512x512 | 10 | 0.6407 | 18.5326 | 583.231 |
| | | | | 30 | 0.7449 | 22.0042 | |
| | | | | 50 | 0.8141 | 23.2959 | |
| | | 30 | 128x128 | 10 | 0.6815 | 19.5307 | 25.2156 |
| | | | | 30 | 0.8151 | 22.8597 | |
| | | | | 50 | 0.8702 | 23.385 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.6452 | 18.7904 | 86.6774 |
| | | | | 30 | 0.7699 | 22.4605 | |
| | | | | 50 | 0.8423 | 23.7469 | |
| 512x512 | 10 | | 0.6444 | 18.2826 | 311.9319 | | |
| | 30 | | 0.7531 | 21.5878 | | | |

| | | | | | | | | |
|---------|-------|----|---------|---------|----------|---------|----------|----------|
| | Glava | 70 | 128x128 | 50 | 0.8298 | 22.8403 | 76.4471 | |
| | | | | 10 | 0.4588 | 20.0778 | | |
| | | | | 30 | 0.5602 | 21.1678 | | |
| | | | 256x256 | 50 | 0.5817 | 21.1749 | | 288.0815 |
| | | | | 10 | 0.5078 | 20.3625 | | |
| | | | | 30 | 0.6503 | 22.6087 | | |
| | | | 512x512 | 50 | 0.6959 | 23.0135 | | 1086.427 |
| | | | | 10 | 0.5601 | 20.78 | | |
| | | | | 30 | 0.6963 | 24.0563 | | |
| | | 50 | 128x128 | 50 | 0.7645 | 25.1373 | 45.8225 | |
| | | | | 10 | 0.527 | 21.5143 | | |
| | | | | 30 | 0.6997 | 24.4009 | | |
| | | | 256x256 | 50 | 0.7373 | 24.7777 | 169.2986 | |
| | | | | 10 | 0.5385 | 21.1078 | | |
| | | | | 30 | 0.7176 | 24.9502 | | |
| | | | 512x512 | 50 | 0.7975 | 26.2823 | 670.7512 | |
| | | | | 10 | 0.5776 | 21.3555 | | |
| | | | | 30 | 0.7297 | 26.2224 | | |
| | | 30 | 128x128 | 50 | 0.8222 | 28.801 | 26.6353 | |
| | | | | 10 | 0.5727 | 22.2192 | | |
| | | | | 30 | 0.7736 | 27.1408 | | |
| | | | 256x256 | 50 | 0.8301 | 28.5559 | 98.8113 | |
| | | | | 10 | 0.554 | 21.394 | | |
| | | | | 30 | 0.7504 | 26.2307 | | |
| 512x512 | 50 | | 0.8487 | 28.584 | 350.8059 | | | |
| | 10 | | 0.583 | 21.4895 | | | | |
| | 30 | | 0.7429 | 26.9602 | | | | |
| | | | 50 | 0.8433 | 30.5143 | | | |

Tabela 5.5: Rezultati PCA analize primijenjene na slikama stopala i glave – gradijentni algoritam (DFT domen)

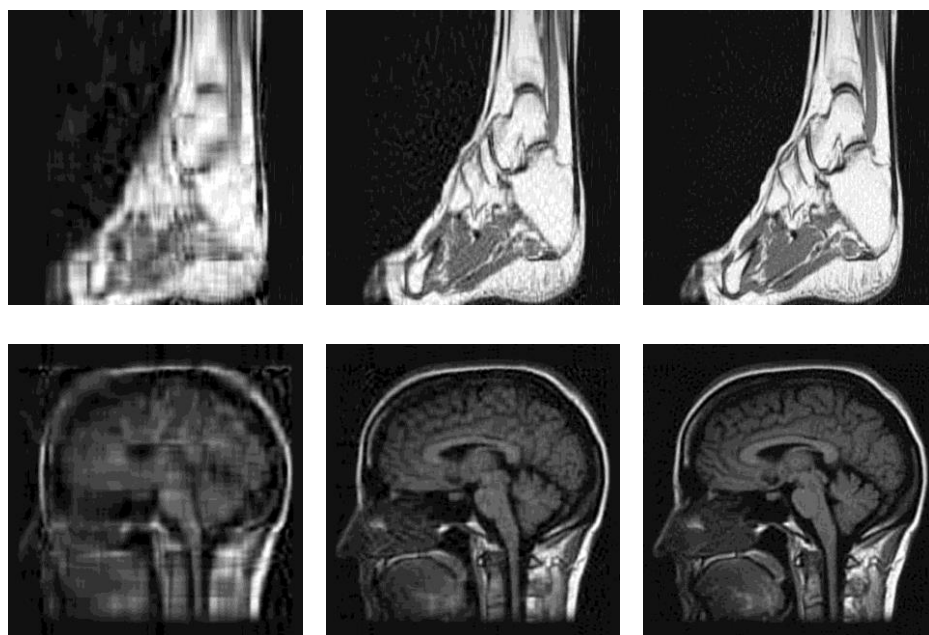
Vrijeme rekonstrukcije korišćenjem gradijentnog algoritma nešto je duže u poređenju sa rekonstrukcijom slike koljena, a značajno duže u odnosu na rekonstrukciju slika stopala i glave u DCT domenu. U toku ovog eksperimenta zabilježen je slučaj gdje je rekonstrukcija gradijentnim algoritmom trajala preko 1000 sekundi, tačnije 1086.427 sekundi (za sliku glave rezolucije 512×512 sa 70% nedostajućih piksela).

Iz Tabele 5.5 primjetno je da nakon PCA analize slika stopala rezolucije 512×512 sa 50% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti postiže veću PSNR vrednost

(23.2959 dB) u poređenju sa slikom koja ima 30% nedostajućih piksela pri istoj rezoluciji i broju glavnih komponenti (22.8403 dB). Ovaj rezultat može biti posljedica gubitka ili slabljenja informacija tokom redukcije dimenzionalnosti pomoću glavnih komponenti, gdje slika sa većim procentom oštećenja ostvaruje bolje uklapanje u isti broj glavnih komponenti. Značajan rezultat postignut je PCA analizom slike glave rezolucije 512×512 sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti, gde je dobijena PSNR vrijednost od 30.5143 dB.

Najveća vrijednost SSIM u ovim eksperimentima izmjerena je za sliku stopala rezolucije 128×128 sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti, iznoseći 0.8702, dok je za sliku glave pod istim parametrima zabilježena vrijednost SSIM od 0.8301.

U nastavku su prikazani rezultati PCA analize slika stopala i glave rekonstruisanih sa 50% nedostajućih piksela rezolucije 512×512 :



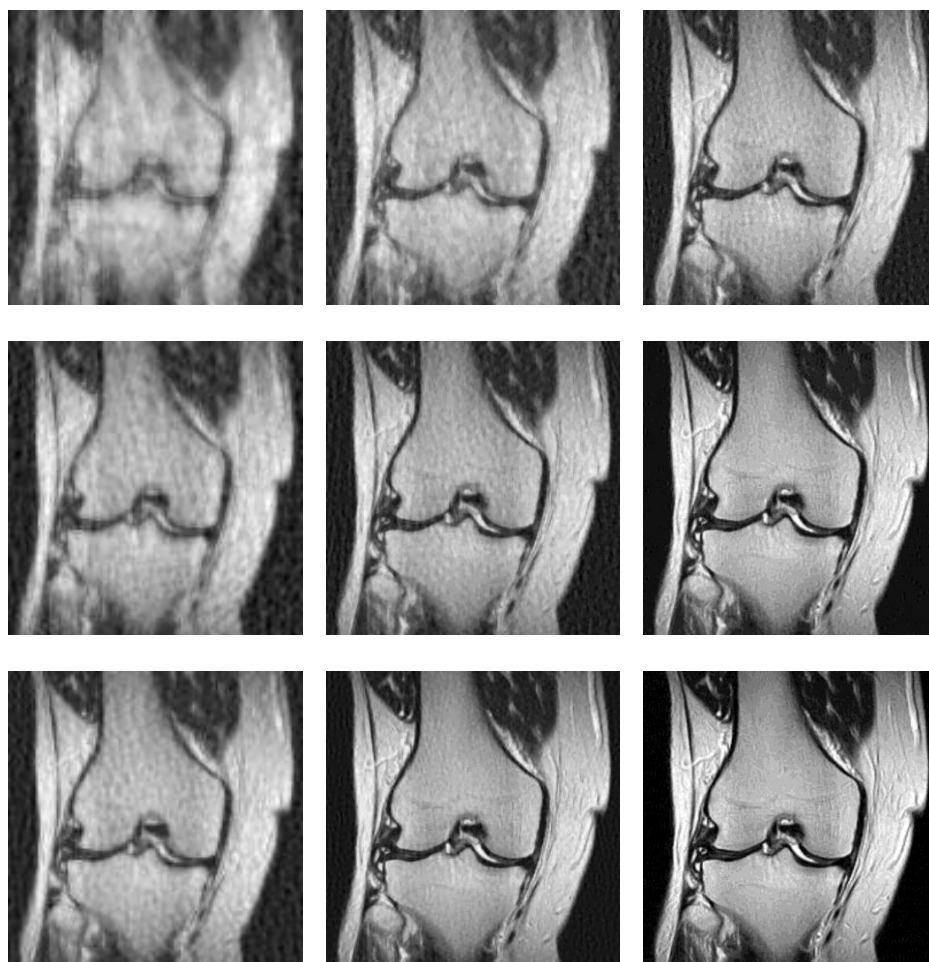
Slika 5.18: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slika stopala dimenzija 512×512 , druga vrsta – slika glave dimenzija 512×512 . Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

5.3 Primjena TwiST algoritma i PCA analize u rekonstrukciji i izdvajanju bitnih karakteristika iz biomedicinskih slika

5.3.1 DCT transformacioni domen

U ovom poglavlju ćemo analizirati rezultate dobijene PCA analizom slika koljena. Korišćen je TwiST algoritam za rekonstrukciju oštećenih slika.

Nakon rekonstrukcije TwiST algoritmom, dobijeni su rezultati prikazani na slici 5.19.

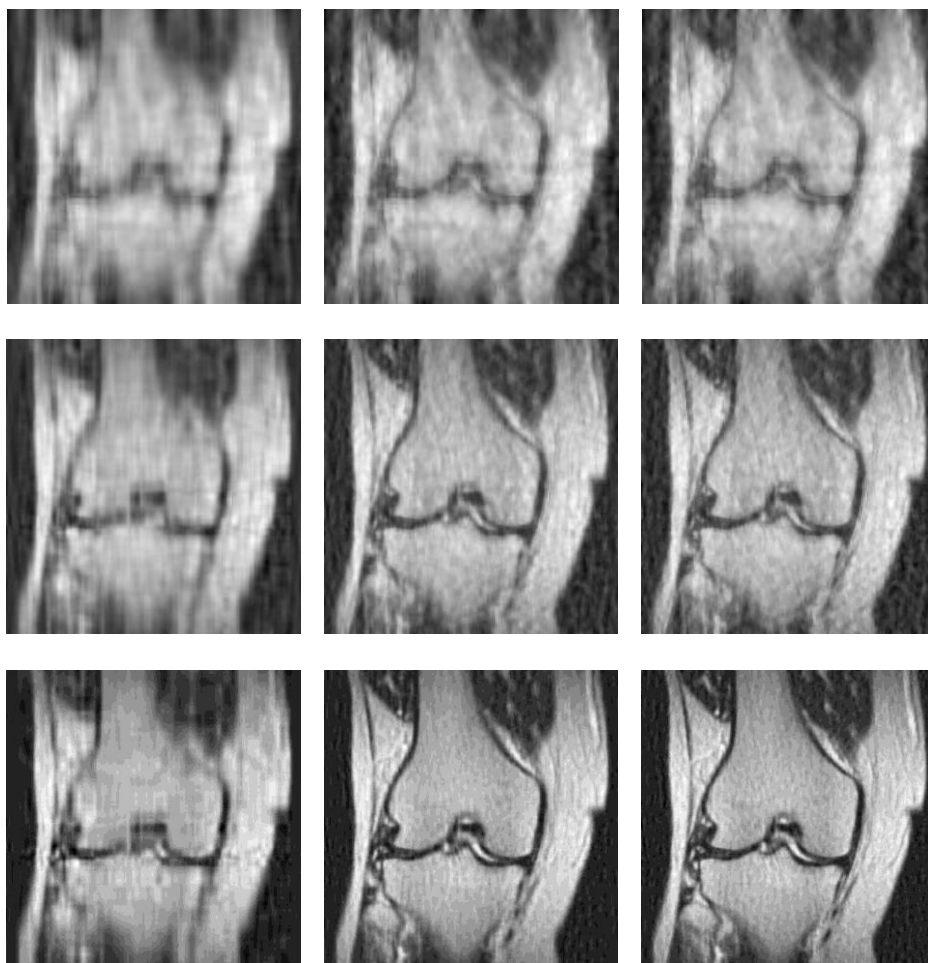


Slika 5.19: Slike nakon rekonstrukcije primjenom TwiST algoritma: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

Kod rekonstruisanih slika rezolucije 128×128 sa 70% i 50% nedostajućih piksela uočava se značajno zamućenje, dok slična pojava postoji i kod slika rezolucija 256×256 i

512×512 sa 70% nedostajućih piksela. Slika rezolucije 256×256 sa 50% nedostajućih piksela, iako pokazuje manjak detalja, zadržava značajnu sličnost sa originalnom slikom. Preostale rekonstruisane slike vizuelno deluju veoma kvalitetno i uspešno čuvaju detalje.

PCA analizom slika rekonstruisanih sa 70% nedostajućih piksela dobijeni su rezultati prikazani na slici 5.20:

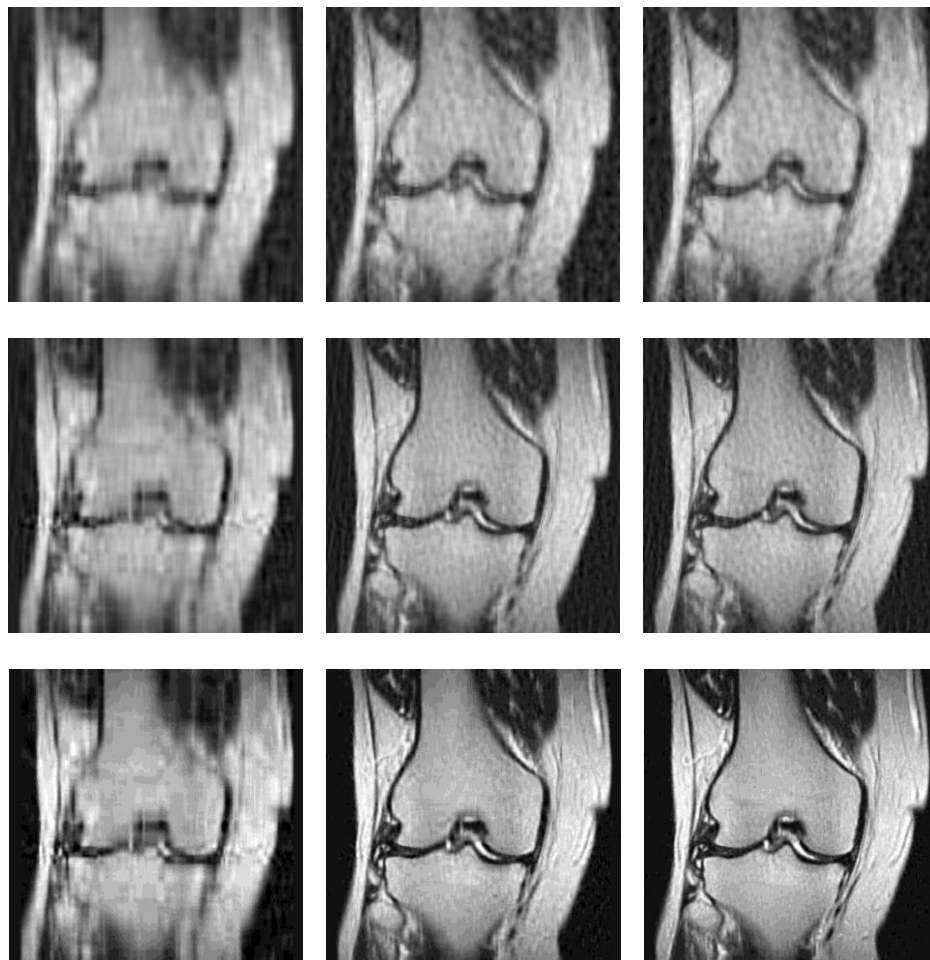


Slika 5.20: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 70% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Nakon PCA analize, slike sa 70% nedostajućih piksela rezolucije 512×512, rekonstruisane korišćenjem 30 i 50 glavnih komponenti, vizuelno su kvalitetne i zadržavaju značajne karakteristike originalnih slika. Kod ostalih slika, međutim, primećuje se izraženo

zamućenje i manjak detalja.

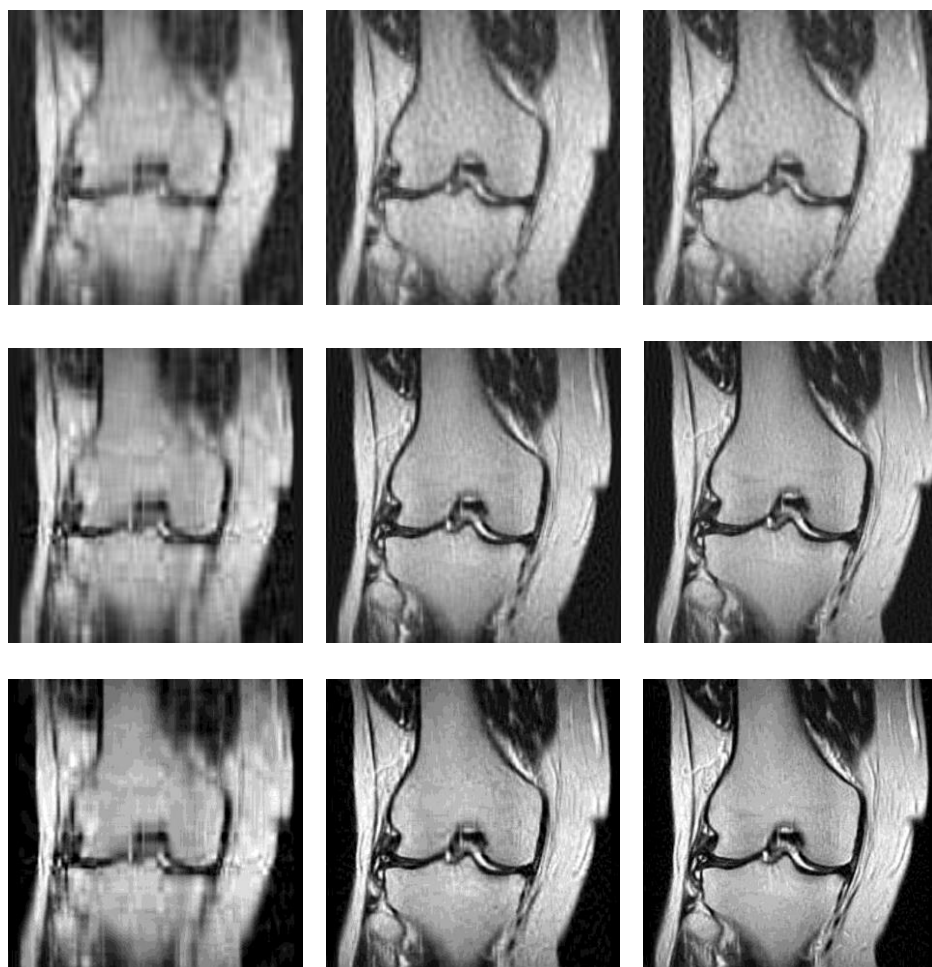
Rezultati nakon PCA analize rekonstruisanih slika sa 50% nedostajućih piksela su prikazani na slici 5.21:



Slika 5.21: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Rezultati PCA analize za slike rezolucije 128×128, bez obzira na broj glavnih komponenti, pokazuju loš kvalitet rekonstrukcije, pri čemu su slike izrazito zamućene. Značajan gubitak detalja primećuje se i kod slika rezolucija 256×256 i 512×512 kada su transformisane u 10 glavnih komponenti. Ostale slike pokazuju značajno bolji kvalitet i vizuelno su vrlo slične originalima.

Nakon PCA analize slika rekonstruisanih sa 30% nedostajućih piksela dobijeni rezultati su prikazani na slici 5.22.



Slika 5.22: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 30% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Kao i u prethodnim analizama, slike rekonstruisane korišćenjem 10 glavnih komponenti, bez obzira na rezoluciju, pokazuju loš kvalitet i nijesu adekvatno rekonstruisane. S druge strane, preostale slike su vjerno rekonstruisane i vizuelno bliske originalima, uz blago zamućenje prisutno kod slika rezolucije 128×128.

U tabeli 5.6 su prikazani rezultati nakon PCA analize:

| PCA analiza na rekonstruisanoj slici | Nedostajući pikseli [%] | Rezolucija | Glavne komponente | SSIM | PSNR[dB] | Vrijeme [s] |
|--------------------------------------|-------------------------|------------|-------------------|---------|----------|-------------|
| | 70 | 128x128 | 10 | 0.4 | 15.5008 | 4.0235 |
| | | | 30 | 0.4281 | 15.7652 | |
| | | | 50 | 0.4313 | 15.7871 | |
| | | 256x256 | 10 | 0.3762 | 16.3365 | 12.8505 |
| | | | 30 | 0.4319 | 17.0568 | |
| | | | 50 | 0.4422 | 17.1333 | |
| | | 512x512 | 10 | 0.4162 | 17.7097 | 61.2408 |
| | | | 30 | 0.4959 | 19.368 | |
| | | | 50 | 0.5198 | 19.6244 | |
| 50 | 128x128 | 10 | 0.4835 | 17.9328 | 2.4765 | |
| | | 30 | 0.5463 | 18.8499 | | |
| | | 50 | 0.5506 | 18.9209 | | |
| | 256x256 | 10 | 0.4313 | 18.6211 | 12.5655 | |
| | | 30 | 0.5402 | 20.7067 | | |
| | | 50 | 0.5654 | 21.0309 | | |
| | 512x512 | 10 | 0.4579 | 19.4533 | 59.1317 | |
| | | 30 | 0.5817 | 23.0865 | | |
| | | 50 | 0.6403 | 24.1822 | | |
| 30 | 128x128 | 10 | 0.5201 | 18.3099 | 1.5763 | |
| | | 30 | 0.6171 | 19.7542 | | |
| | | 50 | 0.6255 | 19.8874 | | |
| | 256x256 | 10 | 0.4606 | 19.5046 | 12.0056 | |
| | | 30 | 0.6153 | 22.9069 | | |
| | | 50 | 0.6647 | 23.7498 | | |
| | 512x512 | 10 | 0.4881 | 20.1801 | 40.4936 | |
| | | 30 | 0.629 | 25.3156 | | |
| | | 50 | 0.7057 | 27.6903 | | |

Tabela 5.6: Rezultati PCA analize primijenjene na slici koljena – TwIST algoritam (DCT domen)

Prvo što se može uočiti jeste da je vrijeme rekonstrukcije korišćenjem TwIST algoritma značajno kraće u poređenju sa gradijentnim algoritmom pri korišćenju istog transformacionog domena. Čak, kod slike rezolucije 512×512 sa 70% nedostajućih piksela, vrijeme rekonstrukcije je kraće za više od 100 sekundi. Takođe, i u ovom slučaju, vrijeme rekonstrukcije raste sa povećanjem rezolucije slike i smanjenjem broja nedostajućih

piksela.

Vrijednosti SSIM i PSNR rastu sa povećanjem rezolucije i broja glavnih komponenti. Međutim, primećena su pojedina odstupanja u vidu viših SSIM vrijednosti kod slika niže rezolucije pri istom procentu nedostajućih piksela i broju glavnih komponenti (10, 30). Razlike u SSIM i PSNR vrijednostima su značajne – PSNR može biti lošiji i do 8.5568 dB, dok je najveća razlika u SSIM vrijednostima do 0.2772.

Najbolje PSNR i SSIM vrijednosti zabilježene su kod slike rezolucije 512×512 sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti, gdje su iznosile 27.6903 dB i 0.7057 redom.

U tabeli 5.7 nalaze se rezultati PCA analize slika stopala i glave:

| | | Nedostajući pikseli [%] | Rezolucija | Glavne komponente | SSIM | PSNR[dB] | Vrijeme [s] |
|---|----------------|-------------------------|------------|-------------------|--------|----------|-------------|
| | | | | | | | |
| PCA analiza na rekonstruisanoj slici | Stopalo | 70 | 128x128 | 10 | 0.1895 | 13.2827 | 3.7506 |
| | | | | 30 | 0.2283 | 13.4657 | |
| | | | | 50 | 0.2323 | 13.4813 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.1701 | 14.6312 | 12.4686 |
| | | | | 30 | 0.2173 | 15.1446 | |
| | | | | 50 | 0.2306 | 15.2181 | |
| | | | 512x512 | 10 | 0.1883 | 15.6843 | 83.7652 |
| | | | | 30 | 0.2486 | 16.8474 | |
| | | | | 50 | 0.2722 | 17.0492 | |
| | | 50 | 128x128 | 10 | 0.2537 | 15.1277 | 5.0376 |
| | | | | 30 | 0.3199 | 15.7054 | |
| | | | | 50 | 0.3294 | 15.768 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.2054 | 16.0873 | 17.6642 |
| | | | | 30 | 0.2946 | 17.3419 | |
| | | | | 50 | 0.3187 | 17.5599 | |
| | | | 512x512 | 10 | 0.2197 | 17.3646 | 141.8492 |
| | | | | 30 | 0.3035 | 19.7731 | |
| | | | | 50 | 0.3543 | 20.5112 | |
| | | 30 | 128x128 | 10 | 0.3125 | 17.905 | 8.0026 |
| | | | | 30 | 0.4128 | 19.8588 | |
| | | | | 50 | 0.4286 | 20.1445 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.2558 | 18.3991 | 28.7763 |
| | | | | 30 | 0.3677 | 21.6872 | |
| | | | | 50 | 0.4118 | 22.7832 | |

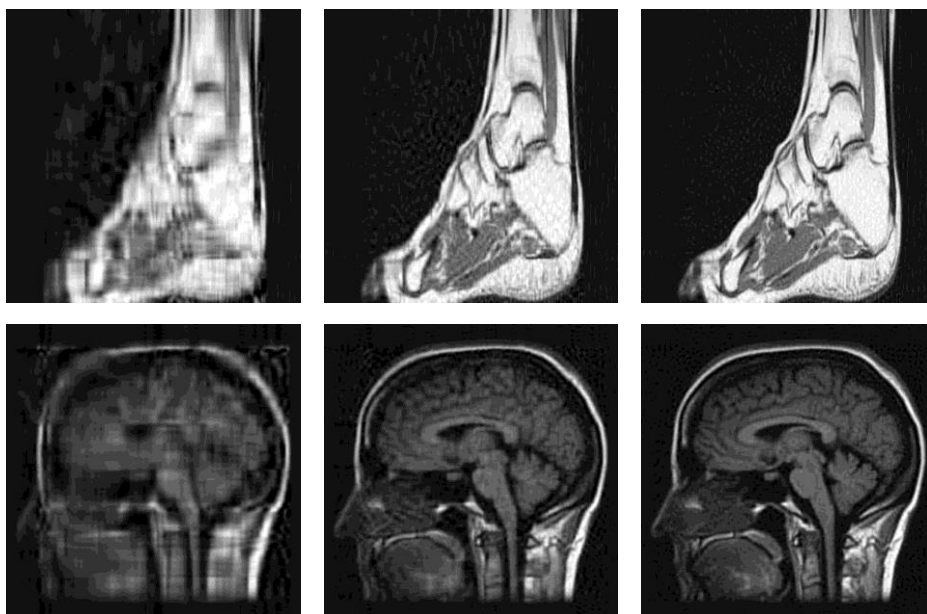
| | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|---------|
| | | 512x512 | 10 | 0.3268 | 19.3397 | 119.9513 | |
| | | | 30 | 0.3936 | 24.5187 | | |
| | | | 50 | 0.4376 | 27.6224 | | |
| | Glava | 70 | 128x128 | 10 | 0.1976 | 10.4707 | 4.193 |
| | | | | 30 | 0.2341 | 10.5415 | |
| | | | | 50 | 0.2427 | 10.5549 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.2563 | 13.6821 | 14.0233 |
| | | | | 30 | 0.2825 | 13.9637 | |
| | | | | 50 | 0.2953 | 14.0031 | |
| | | 512x512 | 10 | 0.3134 | 17.5493 | 10.1228 | |
| | | | 30 | 0.3677 | 18.7242 | | |
| | | | 50 | 0.3875 | 18.9296 | | |
| | | 50 | 128x128 | 10 | 0.3201 | 15.4898 | 5.6243 |
| | | | | 30 | 0.3891 | 15.9382 | |
| | | | | 50 | 0.3975 | 15.994 | |
| | 256x256 | | 10 | 0.3027 | 17.1708 | 21.1067 | |
| | | | 30 | 0.4011 | 18.2517 | | |
| | | | 50 | 0.4312 | 18.4708 | | |
| | 512x512 | | 10 | 0.3529 | 19.4757 | 10.7611 | |
| | | | 30 | 0.4389 | 22.0394 | | |
| | | | 50 | 0.484 | 22.8324 | | |
| | 30 | 128x128 | 10 | 0.3922 | 18.5476 | 6.6471 | |
| | | | 30 | 0.5129 | 19.9305 | | |
| | | | 50 | 0.5326 | 20.1476 | | |
| 256x256 | | 10 | 0.355 | 19.6332 | 20.774 | | |
| | | 30 | 0.4926 | 22.3018 | | | |
| | | 50 | 0.5484 | 23.14 | | | |
| 512x512 | | 10 | 0.3891 | 20.7069 | 11.0951 | | |
| | | 30 | 0.4867 | 24.763 | | | |
| | | 50 | 0.542 | 26.609 | | | |

Tabela 5.7: Rezultati PCA analize primijenjene na slikama stopala i glave – TwIST algoritam (DCT domen)

Slični trendovi rasta i opadanja PSNR i SSIM vrijednosti primijećeni su kao u primjeru slike koljena, ali su ove vrijednosti znatno niže, naročito u pogledu SSIM vrijednosti. Najveće izmjerene SSIM vrijednosti za slike su vrlo loše: za sliku stopala, najveća vrijednost iznosila je 0.4376 pri rezoluciji 512×512, 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti, dok je za sliku glave iznosila 0.5484 pri rezoluciji 256×256, 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti. Što se tiče PSNR vrijednosti, one su znatno

niže za 70% i 50% nedostajućih piksela, dok se vrijednosti približavaju kod 30% nedostajućih piksela. Najveće izmjerene PSNR vrijednosti bile su 27.6224 dB za sliku stopala i 26.609 dB za sliku glave pri rezoluciji 512×512, 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti.

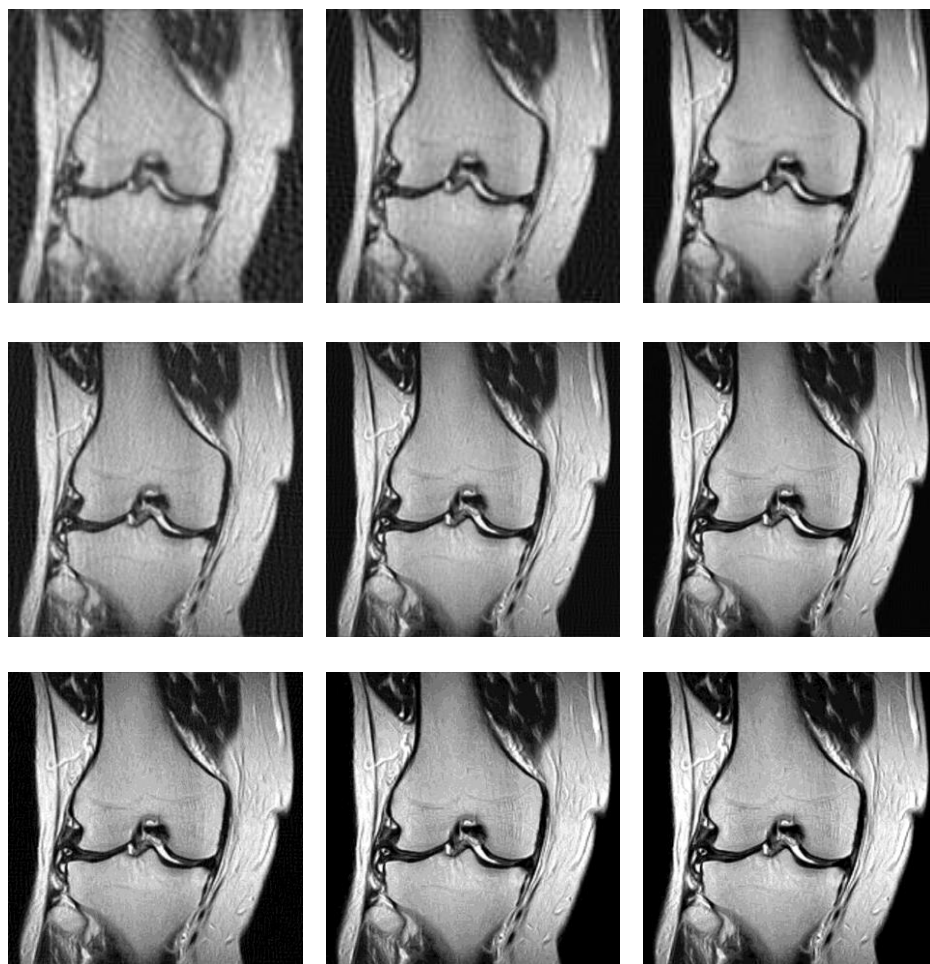
Na slici 5.23 su prikazani rezultati PCA analize slika stopala i glave rekonstruisanih sa 50% nedostajućih piksela rezolucije 512×512:



Slika 5.23: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slika stopala dimenzija 512×512, druga vrsta – slika glave dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

5.3.2 DFT transformacioni domen

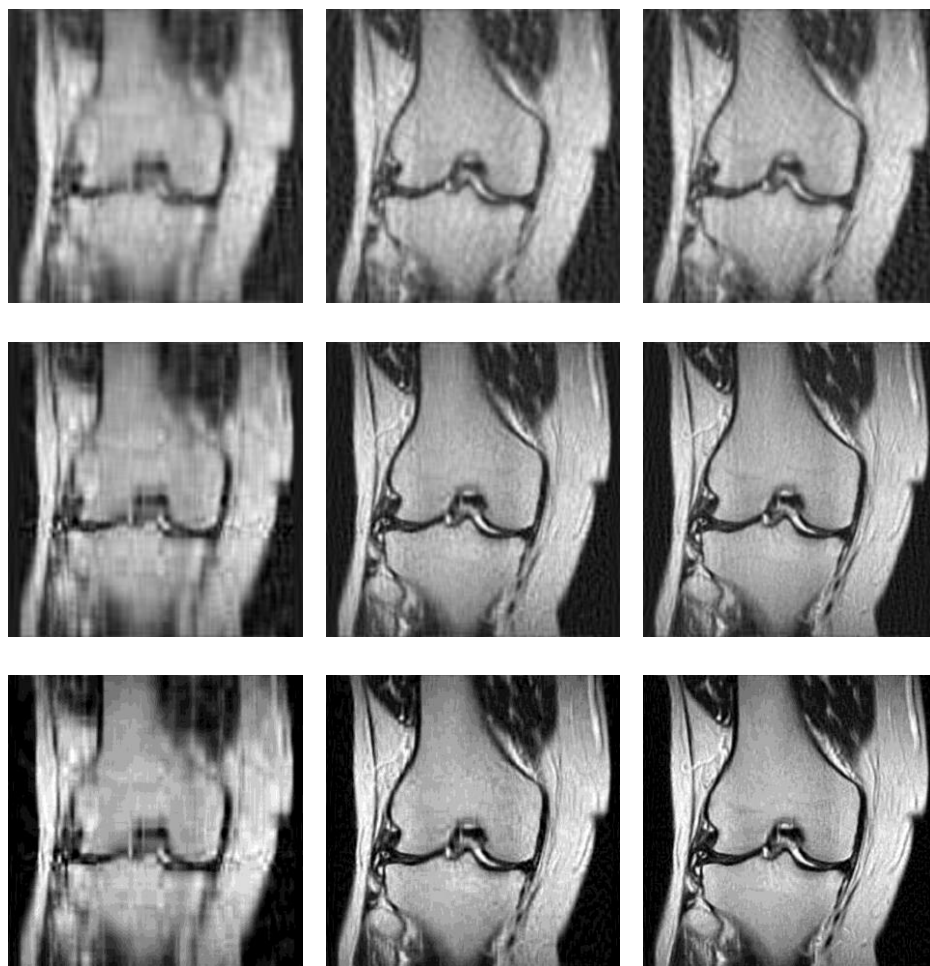
Završni eksperiment u ovom radu sproveden je na slikama rekonstruisanim korišćenjem TwiST algoritma u DFT transformacionom domenu. Rezultati rekonstrukcije prikazani su na slici 5.24:



Slika 5.24: Slike nakon rekonstrukcije primjenom TwiST algoritma: prva vrsta – slike dimenzija 128×128 , druga vrsta - slike dimenzija 256×256 , treća vrsta – slike dimenzija 512×512 . Procenat nedostajućih piksela je 70%, 50% i 30%, od lijeve ka desnoj koloni

Uočava se da slike rekonstruisane u DFT transformacionom domenu imaju značajno bolji kvalitet u poređenju sa rekonstrukcijom u DCT domenu. Veća zamućenost je primjetna jedino kod slike sa 70% nedostajućih piksela i rezolucije 128×128 . Blaža zamućenost prisutna je kod slike sa 50% nedostajućih piksela i rezolucije 256×256 , kao i kod slike sa 70% nedostajućih piksela i rezolucije 128×128 . Ostale slike vizuelno djeluju kvalitetno rekonstruisane.

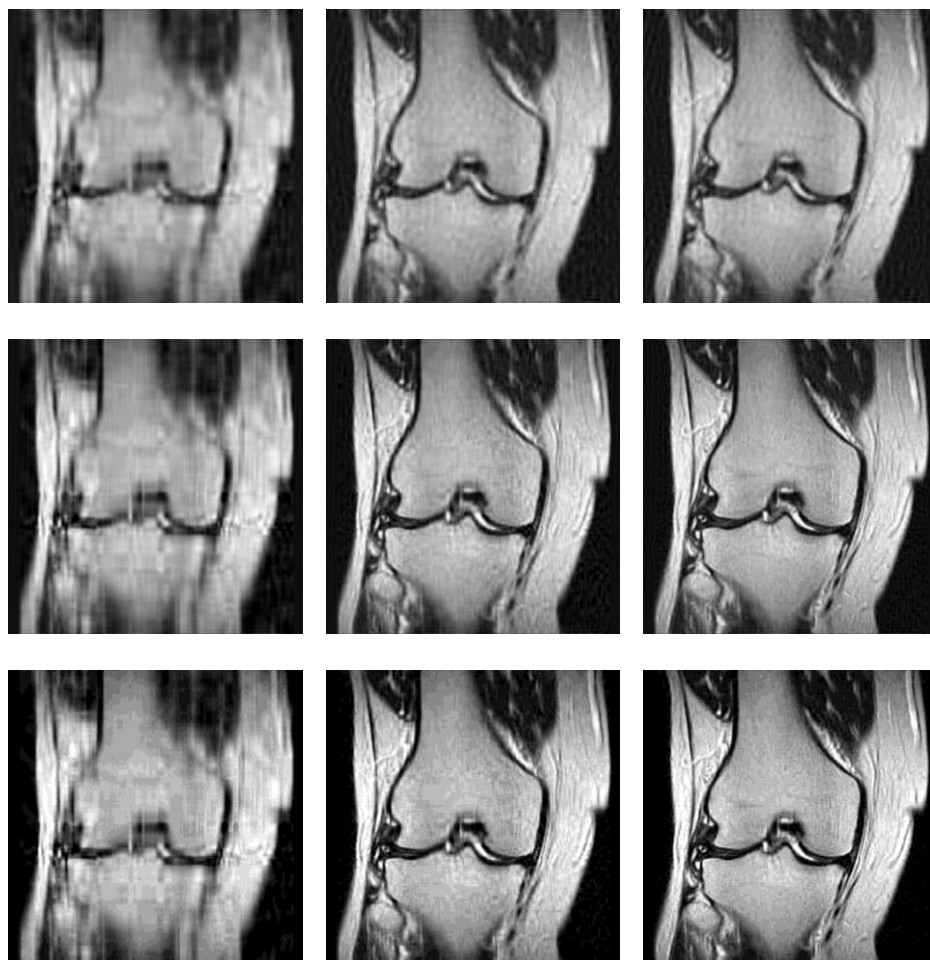
PCA analiza slika rekonstruisanih sa 70% nedostajućih piksela dala je rezultate prikazane na slici 5.25.



Slika 5.25: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 70% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Kako rekonstrukcija slika pomoću TwiST algoritma daje bolje rezultate u DFT transformacionom domenu, tako i nakon primjene PCA analize slike zadržavaju viši nivo kvaliteta. U ovom slučaju, slike rezolucije 256×256 postižu visok kvalitet rekonstrukcije već sa 30 glavnih komponenti. Takođe, kod slika rezolucije 128×128 primećuje se znatno slabije zamućenje.

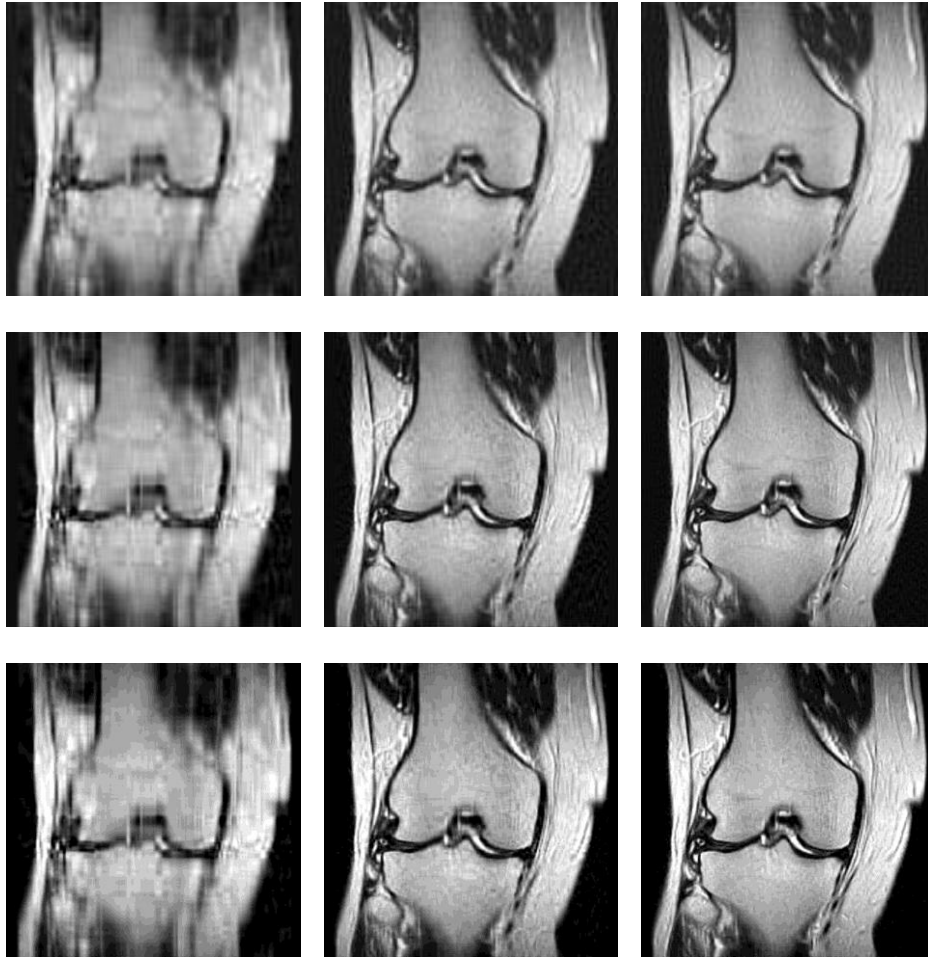
Nakon PCA analize slika rekonstruisanih sa 50% nedostajućih piksela dobijeni su rezultati prikazani na slici 5.26.



Slika 5.26: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

Slike svih rezolucija već pri korišćenju 30 glavnih komponenti izgledaju veoma slično originalu, s tim da je blagi nedostatak detalja primjetan kod slika rezolucije 128×128.

Posljednja varijanta slika rekonstruisanih sa 30% nedostajućih piksela, nakon primjene PCA analize, prikazana je na slici 5.27.



Slika 5.27: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 30% piksela: prva vrsta – slike dimenzija 128×128, druga vrsta - slike dimenzija 256×256, treća vrsta – slike dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

U odnosu na prethodni slučaj, ovdje možemo primijetiti da se popravljaju kvaliteta rekonstrukcije slika rezolucije 128×128. PSNR, SSIM vrijednosti kao i vremena rekonstrukcije su prikazani u tabeli 5.8.

| PCA analiza na rekonstruisanoj slici | Nedostajući pikseli [%] | Rezolucija | Glavne komponente | SSIM | PSNR[dB] | Vrijeme [s] |
|--------------------------------------|-------------------------|------------|-------------------|---------|----------|-------------|
| | 70 | 128x128 | 10 | 0.4955 | 17.8385 | 1.7049 |
| | | | 30 | 0.5952 | 19.0715 | |
| | | | 50 | 0.6027 | 19.1556 | |
| | | 256x256 | 10 | 0.4414 | 19.1374 | 2.2375 |
| | | | 30 | 0.5892 | 22.0442 | |
| | | | 50 | 0.637 | 22.6935 | |
| | | 512x512 | 10 | 0.4791 | 20.08 | 5.1477 |
| | | | 30 | 0.6172 | 24.9374 | |
| | | | 50 | 0.6901 | 27.0047 | |
| 50 | 128x128 | 10 | 0.557 | 19.9945 | 1.4259 | |
| | | 30 | 0.7089 | 23.087 | | |
| | | 50 | 0.7332 | 23.515 | | |
| | 256x256 | 10 | 0.4835 | 20.2502 | 2.2635 | |
| | | 30 | 0.6579 | 25.2289 | | |
| | | 50 | 0.7292 | 27.1999 | | |
| | 512x512 | 10 | 0.5033 | 20.3869 | 5.6136 | |
| | | 30 | 0.6489 | 26.1155 | | |
| | | 50 | 0.731 | 29.3009 | | |
| 30 | 128x128 | 10 | 0.5942 | 21.1731 | 1.4835 | |
| | | 30 | 0.7706 | 26.89 | | |
| | | 50 | 0.8075 | 28.3366 | | |
| | 256x256 | 10 | 0.5233 | 20.6766 | 2.3008 | |
| | | 30 | 0.7022 | 26.9053 | | |
| | | 50 | 0.781 | 30.4567 | | |
| | 512x512 | 10 | 0.5311 | 20.5559 | 6.2658 | |
| | | 30 | 0.6828 | 26.7917 | | |
| | | 50 | 0.7672 | 30.8492 | | |

Tabela 5.8: Rezultati PCA analize primijenjene na slici koljena – TwiST algoritam (DFT domen)

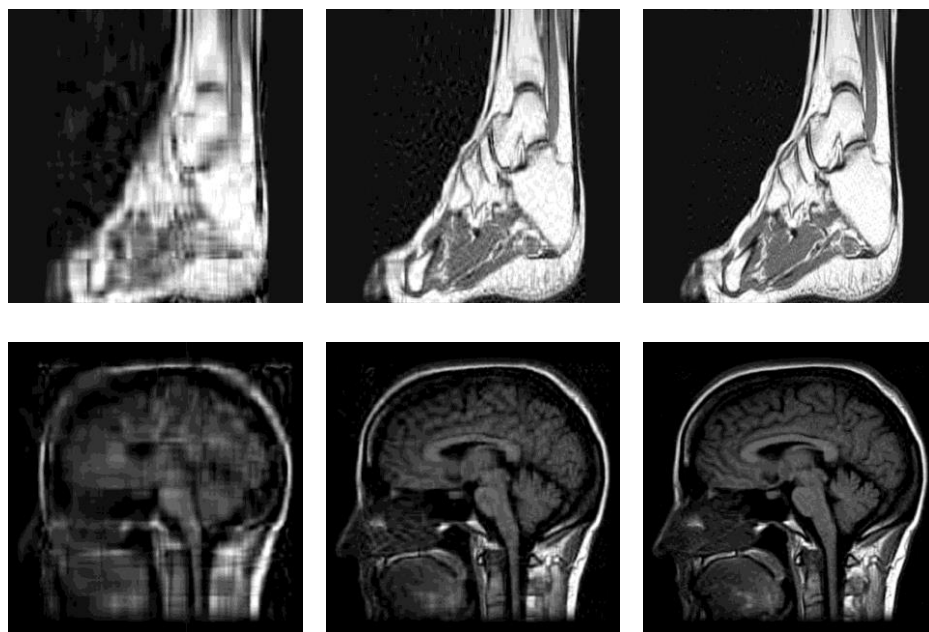
Rekonstrukcija TwiST algoritmom u DFT transformacionom domenu pokazala se kao najefikasnija u pogledu vremena rekonstrukcije. Za sliku najveće rezolucije sa 30% nedostajućih piksela bilo je potrebno samo 6.2658 sekundi.

Što se tiče vrijednosti PSNR i SSIM, postignuti su bolji rezultati u poređenju sa DCT transformacionim domenom. U dva slučaja, PSNR prelazi vrijednost od 30 dB: kod

slika rezolucije 512×512 i 256×256 sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti. Najveća vrijednost SSIM, 0.8075, ostvarena je nakon PCA analize slike rezolucije 128×128 sa 30% nedostajućih piksela i 50 glavnih komponenti. U poređenju sa rezultatima postignutim primjenom gradijentnog algoritma u DFT domenu, PSNR vrijednosti su u ovom slučaju bolje, dok su SSIM vrijednosti niže.

Sljedeći rezultati su dobijene nakon PCA analize slika stopala i glave:

| | | Nedostajući pikseli [%] | Rezolucija | Glavne komponente | SSIM | PSNR[dB] | Vrijeme [s] |
|--------------------------------------|---------|-------------------------|------------|-------------------|---------|----------|-------------|
| | | | | | | | |
| PCA analiza na rekonstruisanoj slici | Stopalo | 70 | 128x128 | 10 | 0.2639 | 15.5014 | 1.4784 |
| | | | | 30 | 0.3421 | 16.2927 | |
| | | | | 50 | 0.3503 | 16.3483 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.2134 | 15.9932 | 2.1026 |
| | | | | 30 | 0.3102 | 17.354 | |
| | | | | 50 | 0.3405 | 17.6239 | |
| | | 512x512 | 10 | 0.2147 | 16.9558 | 5.2297 | |
| | | | 30 | 0.2999 | 19.0817 | | |
| | | | 50 | 0.3512 | 19.7211 | | |
| | | 50 | 128x128 | 10 | 0.3035 | 17.6071 | 1.5718 |
| | | | | 30 | 0.4072 | 19.4048 | |
| | | | | 50 | 0.4206 | 19.6349 | |
| | | | 256x256 | 10 | 0.2416 | 17.4937 | 2.1649 |
| | | | | 30 | 0.3553 | 19.8987 | |
| | | | | 50 | 0.401 | 20.5878 | |
| | | | 512x512 | 10 | 0.2323 | 17.7971 | 5.8073 |
| | | | | 30 | 0.3225 | 20.7 | |
| | | | | 50 | 0.3796 | 21.7405 | |
| | 30 | 128x128 | 10 | 0.3333 | 19.0924 | 1.5036 | |
| | | | 30 | 0.4454 | 22.3384 | | |
| | | | 50 | 0.4636 | 22.9599 | | |
| | | 256x256 | 10 | 0.263 | 18.5999 | 2.2538 | |
| | | | 30 | 0.3749 | 22.2359 | | |
| | | | 50 | 0.4237 | 23.5941 | | |
| 512x512 | | 10 | 0.254 | 18.5687 | 6.286 | | |
| | | 30 | 0.334 | 22.3755 | | | |
| | | 50 | 0.3908 | 24.0193 | | | |
| Glava | 70 | 128x128 | 10 | 0.3383 | 16.55 | 1.4061 | |
| | | | 30 | 0.4454 | 17.2269 | | |



Slika 5.28: Rezultati nakon PCA analize primijenjene na rekonstruisanu sliku kojoj prije rekonstrukcije nedostaje 50% piksela: prva vrsta – slika stopala dimenzija 512×512, druga vrsta – slika glave dimenzija 512×512. Broj glavnih komponenti je 10, 30, 50, od lijeve ka desnoj koloni

6. Zaključak

U ovom radu razmatrana je problematika rekonstrukcije MRI slika sa određenim procentom nedostajućih piksela primjenom savremenih matematičkih metoda. Rekonstrukcija oštećenih slika je rađena korišćenjem metode kompresivnog odabiranja, dok je redukcija dimenzionalnosti realizovana primjenom analize glavnih komponenti.

Za potrebe rekonstrukcije implementirana su dva algoritma – gradijentni algoritam i TwIST uz upotrebu dva transformaciona domena: DCT i DFT. Eksperimentalna analiza je pokazala da gradijentni algoritam daje bolje rezultate u pogledu kvaliteta rekonstrukcije, što je potvrđeno većim PSNR i SSIM vrijednostima. TwIST algoritam, iako nešto slabijih performansi po pitanju kvaliteta slike, pokazao se značajno efikasnijim u pogledu vremena izvršavanja, omogućavajući bržu rekonstrukciju uz zadovoljavajući kvalitet.

Uočen je i uticaj izbora transformacionog domena na kvalitet rekonstruisanih slika. DCT transformacioni domen je dao bolje rezultate u odnosu na DFT u kombinaciji sa gradijentnim algoritmom, pri čemu su za određeni nivo oštećenja i broj glavnih komponenti postignute PSNR vrijednosti iznad 30 dB i SSIM vrijednosti oko 0.9. Nasuprot tome, pri upotrebi TwIST algoritma, DFT transformacija je pokazala nešto bolje rezultate od DCT-a, iako su mjere kvaliteta rekonstrukcije, a naročito SSIM, bili niži u odnosu na gradijentni pristup.

Dobijeni rezultati ukazuju na to da kombinacija CS i PCA metoda, uz pažljiv odabir algoritma i odgovarajućeg transformacionog domena, može predstavljati efikasan pristup za obradu biomedicinskih slika sa visokim stepenom oštećenja. Ovakav kombinovani pristup omogućava uspješnu rekonstrukciju i istovremenu redukciju dimenzionalnosti slike, bez značajnijeg gubitka kvaliteta, čime se smanjuju zahtjevi za memorijskim kapacitetom i prenosom podataka, uz očuvanje dijagnostički relevantnih informacija.

Ovaj rad postavlja osnovu za buduća istraživanja u pravcu proširenja ovih metoda kroz njihovu integraciju sa savremenim pristupima iz oblasti mašinskog učenja, kao i za njihovu primjenu u stvarnim kliničkim scenarijima, gdje brza i pouzdana obrada medicinskih slika ima ključan značaj.

Literatura

- [1] A. Khawaja, "Automatic ECG analysis using principal component analysis and wavelet transformation", Karlsruhe University Press, 2007
- [2] P. Sanguansat, "Principal Component Analysis - Engineering Applications", IntechOpen, 2012.
- [3] G. Ivosev, L. Burton, R. Bonner, "Dimensionality Reduction and Visualization in Principal Component Analysis", Analytical Technologies, 2008
- [4] MIT 9.40 Introduction to Neural Computation, Spring 2018 Instructor: Michale Fee
- [5] I.T. Jolliffe, "Principal Component Analysis, Second Edition ", Springer New York, 2002
- [6] J. Shlens, "A Tutorial on Principal Component Analysis", International Journal of Remote Sensing 51(2), arXiv, 2014
- [7] G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshiran, "An Introduction to Statistical Learning – with Applications in R", Springer, 2013
- [8] A. Majumdar, "Compressed Sensing for Engineers" , First edition, 2018
- [9] G. Kutyniok, "Theory and Applications of Compressed Sensing", Cornell University, 2012
- [10] Dj. Stanković, A. Draganić, C. Ioana, I. Orović, I. Orović, "Enhancing Hopfield Network Performance for Pattern Retrieval Using Sparse Recovery Algorithm and Parzen Estimator," Digital Signal Processing, Volume 156, Part A, January 2025, 104814
- [11] I. Orović, A. Draganić, and S. Stanković, "Sparse Time-Frequency Representation for Signals with Fast Varying Instantaneous Frequency," IET Radar, Sonar & Navigation , Volume: 9, Issue: 9, pp. 1260 - 1267, Online ISSN 1751-8792, December 2015, DOI: 10.1049/iet-rsn.2015.0116
- [12] I. Orović, V. Papić, C. Ioana, X. Li, S. Stanković , "Compressive Sensing in Signal Processing: Algorithms and Transform Domain Formulations", Mathematical Problems in Engineering, Review paper, 2016
- [13] V. Vivekanand, "A Theoretical Framework for Sparse Recovery Algorithm Design and Evaluation in Compressed Sensing Perspective", PhD thesis, Department of Avionics, Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram, INDIA. 695 547, 2023
- [14] LJ. Stanković, E. Sejdić, S. Stanković, M. Daković, and I. Orović, "A Tutorial on Sparse Signal Reconstruction and its Applications in Signal Processing," Circuits, Systems & Signal Processing, (2019) vol. 38, pp.1206–1263, DOI 10.1007/s00034-018-0909-2
- [15] M. Brajović, I. Orović, M. Daković, and S. Stanković, "On the Parameterization of Hermite Transform with Application to the Compression of QRS Complexes," Signal Processing, Vol. 131, pp. 113-119, February 2017, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2016.08.007>
- [16] Y. Eldar, G. Kutyniok "Compressed Sensing: Theory and Applications", Cambridge University Press ISBN: 978-1107005587, DOI:10.1017/CBO9780511794308

- [17] S. Stanković, I. Orović, and LJ. Stanković, "Polynomial Fourier Domain as a Domain of Signal Sparsity," *Signal Processing*, Vol. 130, Jan. 2017, pp. 243–253
- [18] M. Lakičević Žarić, A. Draganić, I. Orović, M. Beko, S. Stanković "Combining Gradient-Based and Thresholding Methods for Improved Signal Reconstruction Performance", *Journal of Signal Processing Systems*, June 2022, <https://doi.org/10.1007/s11265-022-01780-5>
- [19] A. Draganić, I. Orović, S. Stanković, N. Lekić, M. Beko, "Hardware architectures for some sparse signal recovery approaches", Chapter in the Book "Cognitive Sensing Technologies and Applications" , Edited by G.R. Sinha, Bidyadhar Subudhi, Chih-Peng Fan, Humaira Nisar, IET, 2023, Chapter DOI: 10.1049/PBCE135E_ch2, Book DOI: 10.1049/PBCE135E, ISBN: 9781839536892
- [20] I. Orović, S. Stanković, M. Beko, "Multi-base compressive sensing procedure with application to ECG signal reconstruction", *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, volume 2021, Article number: 18, 2021
- [21] LJ. Stanković, D. Mandić, M. Daković, I. Kisil, "Demystifying the Coherence Index in Compressive Sensing", *IEEE Signal Processing Magazine*. 37(1), Jan. 2020
- [22] N. Lekić, M. Lakičević, I. Orović, and S. Stanković, "Adaptive gradient-based analog hardware architecture for 2D under-sampled signals reconstruction," *Microprocessors and Microsystems*, Volume 62, October 2018, Pages 72-78
- [23] M. Brajović, I. Orović, M. Daković, and S. Stanković, "Gradient-based signal reconstruction algorithm in the Hermite transform domain," *Electronics Letters*, Volume 52, Issue 1, pp.41-43, 2016, DOI: <https://doi.org/10.1049/el.2015.1700>
- [24] M. Brajović, I. Orović, M. Beko, S. Stanković, "Reconstruction of Signals with Sparse Representation in Optimally Dilated Hermite Basis," *Signal, Image and Video Processing*, Vol. 17, pp. 2789-2797, 2023
- [25] G. Hua, Y. Hiang, G. Bi , "When Compressive Sensing meets Data Hiding", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 23, No. 4, April 2016
- [26] M. Brajović, S. Stanković, I. Orović, M. Daković, and LJ. Stanković, "Sparsity-Driven Impulsive Noise Removal: A Discrete Hermite Transform Case Study," *27th Telecommunications Forum TELFOR 2019*, Belgrade, Serbia, Nov. 2019
- [27] N. Lekić, A. Draganić, I. Orović, S. Stanković, V. Papić, "Iris print extracting from reduced and scrambled set of pixels," *Second International Balkan Conference on Communications and Networking BalkanCom 2018*, Podgorica, Montenegro, June 6-8, 2018
- [28] D. Donoho, "Compressed sensing", *IEEE Transactions on IT*, vol. 52, no.4, 2006
- [29] S. Stankovic, I. Orovic, E. Sejdic, "Multimedia Signals and Systems: Basic and Advance Algorithms for Signal Processing", Springer-Verlag, New York, 2015
- [30] A. Draganić, I. Orović, M. Beko, S. Stanković, "Seismic Data Recovery From a Reduced Set of Measurements," *The 29th International Conference on*

- Software, Telecommunications and Computer Networks (SoftCOM 2021), pp.1-6, Sep. 23 - 25, 2021, Hvar, Croatia
- [31] M. Lakičević, A. Draganić, I. Orović, and S. Stanković, “Sparse signal reconstruction using gradient-threshold based method,” 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2018
- [32] A. Draganić, I. Orović, S. Stanković, X.Zhang, X. Wang, “Compressive Sensing Approach in the Table Grape Cold Chain Logistics,” 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO 2017, Bar, Montenegro, DOI: 10.1109/MECO.2017.7977143
- [33] J. Wang, S. Kwon, B. Shim, “Generalized orthogonal matching pursuit”, IEEE Transactions on Signal Processing. 62(12): 6202–6216, 2012
- [34] E. J. Candes, J. Romberg, T. Tao, “Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Feb. 2006
- [35] E. J. Candes and T. Tao, “Decoding by linear programming”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 51, no. 12, pp. 4203–4215, 2005, DOI: 10.1109/TIT.2005.858979
- [36] E. Candes, J. Romberg, “l1-magic: Recovery of Sparse Signals via Convex Programming”, Caltech, October 2005
- [37] LJ. Stankovic, M. Dakovic, S. Stankovic, I. Orovic “Sparse Signal Processing”, Book: “Digital Signal Processing”, CreateSpace, Amazon, 2015
- [38] G. Davis, S. Mallat, and M. Avellaneda, Constructive approximation, “Adaptive greedy approximations”, vol. 13, no. 1, pp. 57–98, 1997
- [39] T. Blumensath, M. E. Davies, “Iterative Thresholding for Sparse Approximations”, Journal of Fourier Analysis and Applications, vol. 14, no. 5-6, pp 629-654, December 2008, DOI:10.1007/s00041-008-9035-z
- [40] G. Pope, “Compressive Sensing: a Summary of Reconstruction Algorithms”, Eidgenossische Technische Hochschule, Zurich, Switzerland, 2008
- [41] LJ. Stanković, M. Daković, S. Vujović, “Adaptive variable step algorithm for missing samples recovery in sparse signals”, IET Signal Processing. 2014
- [42] J. Musić, I. Orović, T. Marasović, V. Papić, S. Stanković, “Gradient Compressive Sensing for Image Data Reduction in UAV based Search and Rescue in the Wild”, Article ID 6827414, November 2016
- [43] J. Musić, T. Marasović, V. Papić, I. Orović, S. Stanković, “Performance of compressive sensing image reconstruction for search and rescue”, IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 13(11): 1739 – 1743. Nov. 2016. DOI: 10.1109/LGRS.2016.2606767
- [44] LJ. Stanković, M. Daković, “On a Gradient-Based Algorithm for Sparse Signal Reconstruction in the Signal/Measurements Domain”, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2016, Article ID 6212674, 11 pages, 2016. DOI:10.1155/2016/6212674
- [45] S. Vujović, A. Draganić, M. Lakičević, I. Orović, M. Daković, M. Beko, S. Stanković, “Sparse Analyzer Tool for Biomedical Signals”, Sensors. 20(9), 2602, 2020, DOI: 10.3390/s20092602

- [46] V.M. Patel, R. Chellappa, "Sparse Representations and Compressive Sensing for Imaging and Vision", SpringerBriefs in Electrical and Computer Engineering, 2013
- [47] J. M. B. Dias, M. A. T. Figueiredo, "A New TwIST: Two-Step Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithms for Image Restoration", IEEE Transactions on Image Processing, vol. 16, no. 12, pp. 2992-3004, Dec. 2007, DOI: 10.1109/TIP.2007.909319
- [48] T. Blumensath, M. E. Davies, "Gradient Pursuits", IEEE Transactions on Signal Processing, vol.56, no.6, pp.2370-2382, June 2008, DOI: 10.1109/TSP.2007.916124
- [49] G. Teschke, "Sparse Recovery and Compressive Sampling in Inverse and Ill-Posed Problems", Lecture Notes
- [50] Edited by: M. Khosravy, C. A. Duque, N. Dey, "Compressive Sensing in Healthcare", Academic Press, 2020, DOI:10.1016/C2019-0-02779-3
- [51] A. Desiani, S. I. Maiyanti, K. J. Miraswan, M. Arhami, "PCA-Based on Feature Extraction and Compressed Sensing for Dimensionality Reduction", Computer Engineering and Applications Journal, 8(2):137-144, June 2019, DOI:10.18495/comengapp.v8i2.281
- [52] C. Y. Chou, Y. W. Pua, T. W. Sun, A. Y. Wu, "Compressed-Domain ECG-Based Biometric User Identification Using Compressive Analysis", Sensors, 20(11), 3279, June 2020, DOI:10.3390/s20113279
- [53] Edited by: A. Agah, "Medical Applications of Artificial Intelligence", CRC Press, November 2013, ISBN:9781439884348, 143988434X
- [54] I. T. Jolliffe, J. Cadima, "Principal component analysis: a review and recent developments", April 2016, DOI:10.1098/rsta.2015.0202
- [55] A. E. Lewis, N. Weiskopf, Z. B. Abrams, R. Foraker, A. M. Lai, P. R. O. Payne, A. Gupta "Electronic health record data quality assessment and tools: a systematic review", Sep. 2023, 25;30(10):1730-1740, DOI: 10.1093/jamia/ocad120
- [56] Z. Zhang, A. Castelló, "Principal components analysis in clinical studies", September 2017, DOI: 10.21037/atm.2017.07.12
- [57] C. M. Bishop, "Pattern Recognition and Machine Learning", Springer New York, 2006, ISBN: 9780387310732
- [58] Y. Song, X. Z. Kong, J. X. Liu, J. Wang, S. S. Yuan, L. Y. Dai, "Dual Graph regularized PCA based on Different Norm Constraints for Bi-clustering Analysis on Single-cell RNA-seq", Data 2020 IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine (BIBM), Seoul, Korea (South), 2020, pp. 92-95, DOI: 10.1109/BIBM49941.2020.9313423
- [59] Z. O. Yayci, U. Dura, Z. B. Kaya, A. E. Cetin, M. Turkan, "Microscale Image Enhancement Via PCA and Well-Exposedness Maps," 2022 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), Bordeaux, France, 2022, pp. 2092-2096, DOI: 10.1109/ICIP46576.2022.9898049
- [60] R. Masiero, D. Munaretto, G. Quer, M. Rossi "Data Acquisition through Joint Compressive Sensing and Principal Component Analysis, Source: IEEE Xplore, January 2010, DOI: 10.1109/GLOCOM.2009.5425458

Izjava o istovjetnosti štampane i elektronske verzije master rada

Ime i prezime autora Luka Vulcanović

Broj indeksa/upisa 1/22

Studijski program Elektronika

Naslova rada „Primjena PCA analize i kompresivnog odabiranja u obradi biomedicinskih slika”

Mentor Doc. dr Anđela Draganić

Potpisani/a Luka Vulcanović

Izjavljujem

da je štampana verzija mog master rada istovjetna elektronskoj verziji koju sam predao/la za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore.

Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih ličnih podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva master nauka, kao što su ime i prezime, godina i mjesto rođenja, naslov master rada i datum odbrane rada.

U Podgorici, 16.10.2025. godine

Potpis magistranda

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalnom arhivu Univerziteta Crne Gore pohrani moj master rad pod nazivom:

"Primjena PCA analize i kompresivnog odabiranja u obradi biomedicinskih slika"

koji je moje autorsko djelo.

Master rad sa svim priložima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moj master rad pohranjen u Digitalnom arhivu Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (*Creative Commons*) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – dijeliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – dijeliti pod istim uslovima

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci, kratak opis licenci dat je na poleđini lista).

U Podgorici, 16.10.2025. godine

Potpis magistranda

1. Autorstvo - Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. Autorstvo - nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.
3. Autorstvo - nekomercijalno - bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, bez promjena, preoblikovanja ili upotrebe djela u svom djelu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu djela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja djela.
4. Autorstvo - nekomercijalno - dijeliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerade.
5. Autorstvo - bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, bez promjena, preoblikovanja ili upotrebe djela u svom djelu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

Autorstvo - dijeliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje djela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda